Популярные лекции
ПО МАТЕМАТИКЕ

Н.М.БЕСКИН

ИЗОБРАЖЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ФИГУР

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВЫПУСК 51

Н. М. БЕСКИН

ИЗОБРАЖЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ФИГУР

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1971

513
Б 53
УДК 513.3/4

АННОТАЦИЯ

При изучении стереометрии приходится изображать на плоскости пространственные фигуры. Большинство школьников выполняют эти чертежи как попало, без всяких правил. В этой брошюре, рассчитанной на школьников старших классов, излагается теория изображения пространственных фигур на плоскости и приводятся примеры, соответствующие тематике школьного курса стереометрии.

Николай Михайлович Бескин

ИЗОБРАЖЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ФИГУР

(Серия: «Популярные лекции по математике»)

М., 1971 г., 80 стр. с илл.

Редактор *А. Ф. Лапко*

Техн. редактор *Л. А. Пыжова* Корректор *Г. С. Смоликова*

Сдано в набор 20/XI 1970 г. Подписано к печати 4/III 1971 г. Бумага 84×108$^{1}/_{32}$. Физ. печ. л. 2,5. Услови. печ. л. 4,2. Уч.-изд. л. 3,9. Тираж 100 000 экз. Т-02224. Цена книги 12 коп. Заказ № 2232

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР. Москва, М-54, Валовая, 28

Отпечатано с матриц во 2-й типографии издательства «Наука»
Москва, Г-99, Шубинский пер., 10

2-2-2
74-71

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава I

ТЕОРИЯ

1. Предмет теории изображений 5
2. Какие требования предъявляются к изображению 5
3. О чем будет рассказано в этой книжке 6
4. Метод параллельных проекций 7
5. Замечание об обозначениях 8
6. Свойства параллельных проекций 9
7. Свободные изображения 12
8. Изображение плоских фигур 13
9. Примеры построения изображений многоугольников. 14
10. Изображение окружности 16
11. Другая точка зрения на построение изображений плоских фигур 17
12. Теорема Польке — Шварца 20
13. Изображение пространственных фигур 26
14. Обратимость изображения 28
15. Условные изображения 31

Глава II

ПРАКТИКА

16. Сечения многогранников 33
17. Метрические задачи 36
18. Круглые тела 38
19. Изображение плоскости 43
20. Вписанные и описанные фигуры 45
21. Некоторые условности чертежа 48
22. От чего зависит наглядность изображения? 49

Глава III

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ МЕТОД

23. Теория вычислительного метода 52
24. Практика вычислительного метода 55

Приложение 1

ВЫРАЖЕНИЕ КООРДИНАТ ТОЧЕК ИЗОБРАЖЕНИЯ ЧЕРЕЗ КООРДИНАТЫ ТОЧЕК ОРИГИНАЛА

25. Характеристическое свойство линейной однородной функции 64
26. Формулы для координат точек изображения 66

Приложение 2

ЭЛЛИПС

27. Равномерное сжатие 69
28. Определение эллипса 72
29. Некоторые свойства эллипса 72
30. Эллипс как проекция окружности 75
31. Сечение кругового цилиндра 76
32. Некоторые построения, связанные с эллипсом 77

Заключение

33. Литературные указания 80

ГЛАВА I

ТЕОРИЯ

1. Предмет теории изображений. При изображении плоской фигуры не возникает никаких геометрических проблем. Чертеж служит либо точной копией оригинала, либо представляет подобную ему фигуру. Рассматривая на чертеже изображение круга, мы получаем такое же зрительное впечатление, как если бы рассматривали круг-оригинал.

Совсем иначе обстоит дело с изображением пространственных фигур. К сожалению, не существует «пространственного карандаша», кончик которого оставлял бы след в воздухе. Таким карандашом можно было бы «начертить» настоящий куб, обведя его ребра. Но раз этого нет, нам приходится вычерчивать изображение куба, проводя кончиком обыкновенного карандаша по бумаге. Плоское изображение не может быть точной копией пространственной фигуры. Из этой дисгармонии возникает проблема: по каким правилам строить изображение, чтобы оно *наилучшим образом* представляло оригинал. Но что значит «наилучшим образом»? Это будет выяснено в следующем пункте.

2. Какие требования предъявляются к изображению. Этих требований два: наглядность и удобоизмеримость.

Наглядность означает следующее: изображение должно быть *похоже* на оригинал, т. е. при рассматривании изображения должно возникать зрительное впечатление, близкое к тому, которое возникает при рассматривании оригинала. Оговоримся, что речь идет только о восприятии геометрической формы оригинала, а не цвета и многих других свойств, не относящихся к ведению геометрии.

Удобоизмеримость есть возможность легко (с минимумом геометрических построений и вычислений) узнать все размеры оригинала.

Эти два требования находятся в противоречии. Поэтому начертательная геометрия (наука о методах изображения пространственных фигур на плоскости) выработала много различных методов, в которых либо осуществляется компромисс между наглядностью и удобоизмеримостью, либо отдается предпочтение одному из этих требований, а другое игнорируется. Выбор метода зависит от того, с какой целью делается изображение.

Для художественного рисунка важна только наглядность, а удобоизмеримость не играет роли. Человек, рассматривающий произведение живописи, должен непосредственно (без всяких построений и расчетов) понимать, что́ изобразил художник. Для этого понимания от зрителя не требуется никакой математической подготовки.

Другое дело — инженерный чертеж. Если рабочему дается чертеж предмета, который он должен изготовить, то важна удобоизмеримость, а не наглядность. Существуют методы изображения, совсем не наглядные. Рассматривая чертеж, выполненный по такому методу, непосвященный человек не поймет, что́ на нем изображено: для этого требуется специальная подготовка. Зато посвященный легко узнает все размеры оригинала.

3. О чем будет рассказано в этой книжке. Итак, в начертательной геометрии есть много разных методов, выработанных для разных целей. Если их излагать, то получится толстый том. Поэтому мы изложим только один. Сначала укажем, чему мы хотим научить читателя.

Мы хотим научить читателя выполнять чертежи, встречающиеся в курсе стереометрии (при изучении теории и при решении задач).

Каждый школьник, изучая стереометрию, обязательно делает чертежи, но он делает их «без правил». Обычно школьник копирует образцы: чертежи в учебнике и чертежи учителя на доске. В этой книжке будет изложена геометрическая теория, на которой основано построение чертежей в стереометрии. Изучив эту теорию, читатель сможет выполнять чертежи сознательно, т. е. понимая, почему следует строить чертеж именно так. Кроме того, он не будет

скован необходимостью всегда повторять немногочисленные образцы, а сможет разнообразить их.

В первой главе книжки излагается теория, во второй — применения (как изобразить куб, конус, шар и т. д.), в третьей — особый метод, позволяющий наносить точки изображения по их координатам.

4. Метод параллельных проекций. Если требуется обеспечить наглядность, то всегда пользуются проекционными методами. Простейшие из них — метод центральных проекций и метод параллельных проекций.

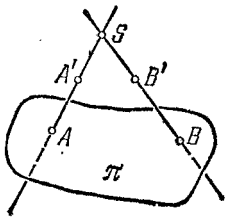

Рис. 1.

Метод центральных проекций ясен из рис. 1. Берется фиксированная точка S (центр проекций) и фиксированная плоскость π (плоскость проекций), не проходящая через S. Через любую точку A' пространства проводится прямая SA' (проектирующая прямая). Точка A пересечения этой прямой с плоскостью π называется проекцией точки A'. На рис. 1 показаны проекции двух точек A' и B'. После построения проекций всех или некоторых точек оригинала полученный чертеж подвергается еще подобному преобразованию, и тогда получается изображение.

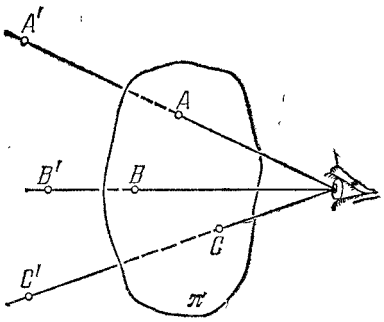

Рис. 2.

Метод центральных проекций дает самые наглядные изображения, потому что описанное построение воспроизводит процесс зрения. На рис. 2 показано: лучи, идущие в глаз из точек оригинала (A', B', ...) или из их проекций (A, B, ...),— те же самые. Таким образом, глазу все равно — рассматривать ли оригинал или его проекцию на плоскость π[1]).

[1]) Мы несколько упрощаем: ведь оригинал рассматривается *двумя глазами*.

Художники пользуются только методом центральных проекций.

Метод параллельных проекций отличается от метода центральных проекций только тем, что проектирующие прямые не проходят через фиксированную точку, а параллельны фиксированному направлению (рис. 3).

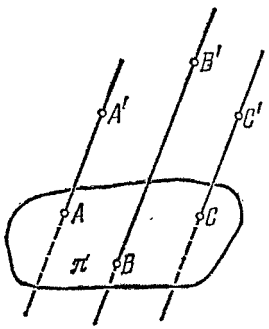

Рис. 3.

Изображения по методу параллельных проекций несколько менее наглядны, потому что они не столь близки процессу зрения. Однако наглядность их все же достаточна: узнать оригинал легко. Это объясняется тем, что при неограниченном удалении глаза от оригинала лучи зрения становятся почти параллельными. Изображение в параллельной проекции напоминает предмет небольших размеров, рассматриваемый издалека.

Метод параллельных проекций значительно проще, чем центральных. Поэтому он всегда используется при изготовлении иллюстративных чертежей в учебной и научной литературе.

5. Замечание об обозначениях. При выполнении чертежей в стереометрии мы никогда не имеем дела с оригиналом, а только с изображением. Учитель делает на доске чертеж и говорит: «Это — куб». На самом деле на доске — изображение куба. А где же сам куб? Он находится где-то над вашими головами (рис. 4). Через его вершины проходят проектирующие прямые, которые в пересечении с доской дают точки, отмеченные учителем.

Есть единственная область геометрии, которая имеет дело с оригиналом: начертательная геометрия. Она изучает взаимоотношения между оригиналом и изображением.

Поскольку с оригиналом мы встречаемся столь редко, принято: все элементы оригинала обозначать буквами со штрихом, а соответственные элементы изображения — теми же буквами без штриха. Например:

точка A' имеет изображением точку A,

прямая m' имеет изображением прямую m.

Если бы мы условились поступать наоборот, то нам пришлось бы в стереометрии все буквы на всех чертежах снабжать штрихами.

На чертеже, изображенном на рис. 1, и на последующих чертежах плоскость изображена непривычным образом (не в

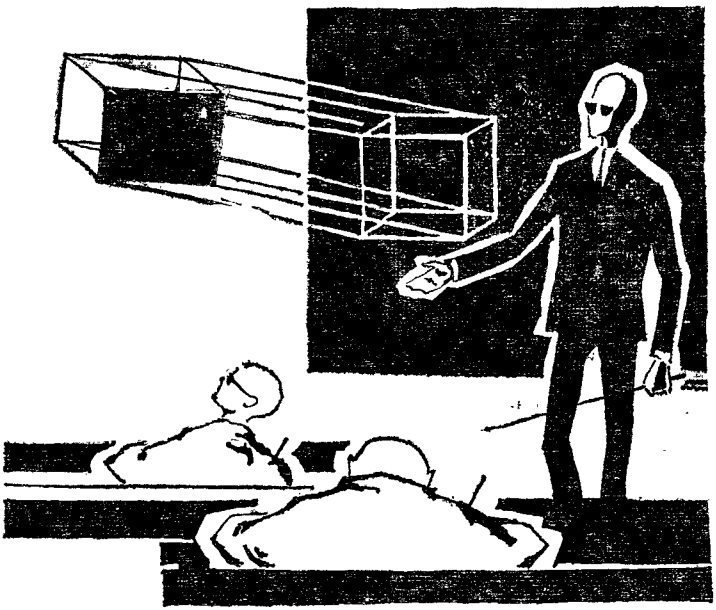

Рис. 4.

виде параллелограмма, а с оборванными краями), это будет пояснено ниже: п. 19 будет специально посвящен этому вопросу.

6. Свойства параллельных проекций. Изображение по методу параллельных проекций получается двумя шагами:

1. Все точки оригинала проектируются по данному направлению m (направление проектирования) на плоскость проекций.

2. Полученная в плоскости проекций фигура подвергается подобному преобразованию.

То, что получится после этих двух шагов, называется изображением. Таким образом, каждая точка изображения, вообще говоря, не есть непосредственная проекция соответствующей точки оригинала.

Второй шаг имеет целью придать чертежу удобные размеры. Он не влияет на форму полученной фигуры. Разумеется, в некоторых случаях его может и не быть.

Точки оригинала, лежащие на одной проектирующей прямой, называются конкурирующими точками. *Конкурирующие точки имеют одно и то же изображение.*

Перечислим основные свойства параллельных проекций.

Свойство 1. *Изображение прямой линии есть прямая или точка.*

Предположим, что прямая a' — не проектирующая. Возьмем на ней любые точки A', B', C', ... и проведем через них проектирующие прямые (рис. 5). Эти прямые лежат в одной плоскости (проходящей через a' и параллельной m). Пересечение этой плоскости с плоскостью π есть прямая [1]).

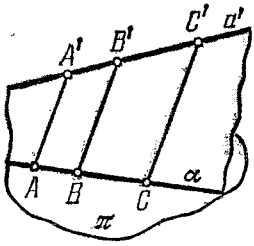

Рис. 5.

Заметим, что плоскость, параллельная направлению проектирования m, называется проектирующей плоскостью.

Если прямая a' — проектирующая, то все ее точки имеют одно и то же изображение, т. е. вся прямая изображается точкой.

Свойство 2. *Параллельные прямые изображаются параллельными прямыми (в частности, может быть, совпавшими) или каждая одной точкой.*

Предположим, что параллельные прямые a', b', c', ... не проектирующие. Проходящие через них проектирующие плоскости α', β', γ', ... параллельны между собой (а может быть и совпадают) и, следовательно, пересекают плоскость π по параллельным прямым (в частности — совпадающим).

Если же параллельные прямые — проектирующие, то они изображаются отдельными точками.

Свойство 3. *Отношение, в котором точка отрезка делит этот отрезок, в изображении и в оригинале одинаково* [2]).

---

[1]) Мы не будем каждый раз упоминать о втором шаге (подобное преобразование). Ясно, что он не меняет дела.

[2]) Это отношение называется отношением трех точек прямой, его обозначают (PQR), где R — точка, делящая отрезок PQ: $(PQR) = \frac{PR}{RQ}$.

Пусть B' — точка отрезка $A'C'$. Прямые $A'A$, $B'B$ и $C'C$ параллельны (рис. 5), откуда следует:

$$\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'}.$$

Если точки A', B', C' принадлежат проектирующей прямой, то три точки A, B, C совпадают. Тогда отношение $\frac{AB}{BC}$ принимает неопределенный вид $\frac{0}{0}$. Поскольку $\frac{0}{0}$ можно считать равным любому числу — доказанную пропорцию можно считать справедливой и в этом случае.

Из свойства 3, в частности, следует,что *середина отрезка изображается серединой.*

Примечание 1. То обстоятельство, что B' — внутренняя точка отрезка $A'C'$, несущественно. Если B' лежит на прямой $A'C'$ вне отрезка $A'C'$, то можно считать, что и в этом случае она делит отрезок $A'C'$ в отношении $\frac{A'B'}{B'C'}$, но только это отношение следует считать отрицательным. При таком соглашении *любая точка прямой $A'C'$ делит отрезок $A'C'$ в изображении и в оригинале одинаково.* Например, на рис. 6 точки C, D, E делят отрезок AB в таких отношениях: $(ABC)=3$, $(ABD)=-3$, $(ABE)=-1/3$.

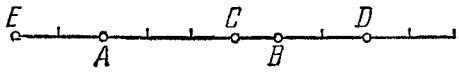

Рис. 6.

Примечание 2. Свойство фигур, не изменяющееся при некотором геометрическом преобразовании, называется инвариантным относительно этого преобразования. Не изменяющийся параметр фигур называется инвариантом данного преобразования.

Параллельное проектирование есть преобразование, переводящее всякую фигуру F' в фигуру F (проекцию).

Доказанные три положения устанавливают, что прямолинейность (свойство линии) и параллельность (свойство пары прямых) суть инвариантные свойства параллельного проектирования, а отношение трех точек прямой есть инвариант параллельного проектирования.

Это верно не только для непосредственного проектирования, но и для построения изображений по методу параллельных проекций (см. сноску [1] на стр. 10).

7. Свободные изображения. При построении изображений следует различать две постановки вопроса.

Первая. Дан оригинал. Положим для определенности, что это — куб, ребро которого равно 1 *м*. Даны все параметры проектирующего аппарата: например, направление проектирования m параллельно диагонали куба и образует с плоскостью проекций π угол $\sigma=60°$, полученная проекция подвергнута подобному преобразованию с коэффициентом $k=0{,}02$. Построить изображение.

Вторая отличается от первой тем, что параметры проектирующего аппарата не даны. Задача формулируется так: построить изображение куба. Несмотря на кажущуюся простоту этой формулировки, необходимо подробно выяснить, как это следует понимать.

Когда мы в стереометрии чертим куб, то нам безразлично, как расположен оригинал относительно листа бумаги или доски. Нам лишь необходима уверенность, что начерченная фигура может служить изображением *какого-нибудь* куба.

Поясним это несколько иначе. Положим, что учитель начертил на доске куб *как попало* (рис. 4). Можно ли после этого поместить в воздухе какой-нибудь куб так, чтобы его проекция на доску по какому-нибудь направлению совпала с начерченной фигурой? Если нет, то начерченная фигура не может служить изображением никакого куба. Такой чертеж следует считать *неправильным* или *ошибочным*. Неправильный чертеж не может быть наглядным.

Если же найдется куб-оригинал, соответствующий начерченной фигуре, то чертеж выполнен *правильно*. Правильность — необходимое, но не достаточное условие наглядности. Для наглядности требуются еще два условия, о которых будет сказано в п. 22.

Изображение, которое строится без учета расположения оригинала относительно чертежа, называется свободным изображением. При изучении стереометрии, в иллюстративной практике и в большинстве инженерных приложений применяются свободные изображения. Мы всегда чертим *какой-нибудь* куб или *какой-нибудь* шар. Поэтому *в настоящей книжке рассматриваются только свободные изображения.*

Чтобы свободное изображение было правильным, нужно, строя его, руководствоваться некоторыми правилами. Изложение этих правил и есть наша цель.

8. Изображение плоских фигур. Имеется в виду, что в плоскости чертежа изображаются фигуры, лежащие в другой плоскости. При изображении они могут искажаться. В стереометрии часто приходится изображать пространственные фигуры, содержащие различные плоские элементы. Например, изображая многогранник, мы его различные грани изображаем в одной и той же плоскости чертежа.

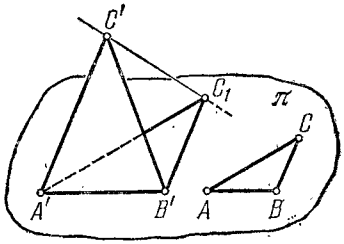

Рис. 7.

Теория изображения плоских фигур основана на следующих двух теоремах.

Теорема 1. *Любой данный треугольник может быть изображен произвольным треугольником.*

Пояснение. Пусть, например, требуется изобразить треугольник $A'B'C'$ по данным: $\sphericalangle A'=60°$, $A'B'=3$ *м*, $A'C'=2$ *м*. Можно начертить *какой-угодно* треугольник ABC и утверждать, что он есть изображение данного треугольника $A'B'C'$.

Доказательство. Имеем два треугольника: оригинал $A'B'C'$ и треугольник ABC. Проведем через сторону $A'B'$ плоскость π, отличную от плоскости $A'B'C'$ (рис. 7). В плоскости π построим на стороне $A'B'$ треугольник $A'B'C_1$, подобный треугольнику ABC (таких треугольников существует два, возьмем любой из них). Примем $m\equiv C'C_1$ за направление проектирования. Тогда проекцией треугольника $A'B'C'$ на плоскость π окажется треугольник $A'B'C_1$. Подобно изменяя его, получим треугольник ABC.

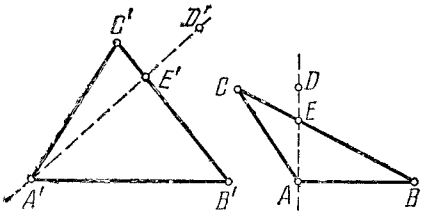

Рис. 8.

Теорема 2. *Если дано изображение треугольника $A'B'C'$, то тем самым однозначно определено изображение каждой точки, принадлежащей плоскости этого треугольника.*

Доказательство. Пусть $A'B'C'$ — оригинал, а ABC — изображение (рис. 8). Возьмем в плоскости треугольника $A'B'C'$ произвольную точку D' и соединим ее

с любой вершиной треугольника, например с A'. Пусть E' — точка пересечения $A'D'$ с противоположной стороной $B'C'$ (безразлично, находится ли E' внутри отрезка $B'C'$ или на продолжении). $A'D'$ может оказаться параллельной $B'C'$. Будем предполагать пока, что $A'D'$ не параллельна $B'C'$. Изображение E точки E' можно найти: оно должно делить отрезок BC в таком же отношении, в каком E' делит отрезок $B'C'$, т. е.

$$\frac{BE}{EC}=\frac{B'E'}{E'C'}.$$

Точка D должна лежать на прямой AE. Ее положение на этой прямой определяется из пропорции

$$\frac{AD}{DE}=\frac{A'D'}{D'E'}.$$

Если же $A'D'\|B'C'$, то и $AD\|BC$ и

$$\frac{AD}{BC}=\frac{A'D'}{B'C'}.$$

Из доказанных двух теорем вытекает практическое правило для построения изображений плоских фигур. Когда мы начинаем чертить изображение плоской фигуры F', то *сначала, до известного момента*, мы можем чертить *произвольно*. Но вдруг наступает момент, когда весь произвол исчерпан, и дальше на чертеже уже́ ничего нельзя проводить произвольно, а надо все строить. Только что доказанные две теоремы позволяют уловить этот опасный момент: надо выбрать в составе фигуры F' любые три точки общего положения, (т. е. не лежащие на одной прямой) и изобразить их произвольными тремя точками общего положения. На этом произвол кончается: изображения всех остальных точек надо строить. Другими словами, данный треугольник можно изобразить произвольно, а данный четырехугольник уже́ нельзя.

9. Примеры построения изображения многоугольников. Пример 1. *Построить изображение квадрата.*

Заметим, что параллелограмм должен изображаться параллелограммом. С другой стороны, любой данный параллелограмм (в частности, квадрат) можно изобразить любым параллелограммом. В самом деле, в составе параллелограмма $A'B'C'D'$ можно выделить треугольник $A'B'C'$ и изобра-

зить этот треугольник произвольным треугольником ABC. Затем этот треугольник следует достроить до параллелограмма. Значит, чтобы изобразить квадрат, следует начертить произвольный параллелограмм.

Пример 2. *Изобразить правильный шестиугольник.*

Построение изображения всякой плоской фигуры можно расчленить на три этапа.

Первый. Представить мысленно или начертить оригинал в натуральном виде (т. е. без искажений).

Второй. Выделить в составе оригинала какой-нибудь треугольник и изобразить его произвольным треугольником.

Третий. Постепенно строить остальные элементы фигуры, пользуясь их связями с уже́ начерченными. Однако (Внимание! Это — самое важное) разрешается пользоваться не всеми связями, а только инвариантными относительно параллельного проектирования. Например, если в натуре две прямые перпендикулярны, то это свойство нельзя переносить на изображение, а если параллельны, то можно.

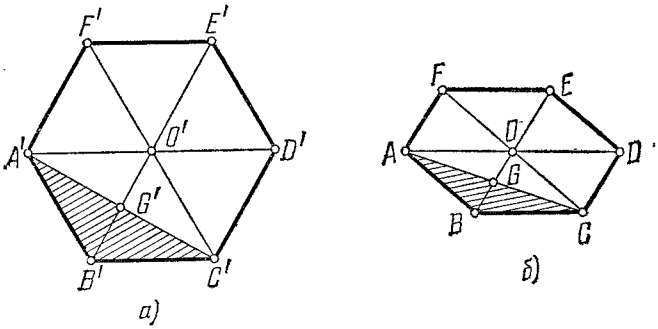

Рис. 9.

Решим теперь поставленную задачу. На рис. 9, *а* показан правильный шестиугольник $A'B'C'D'E'F'$ в натуральном виде (первый этап). Изобразим треугольник $A'B'C'$ произвольно (второй этап, рис. 9, *б*). Точка G' есть середина отрезка $A'C'$. Это свойство инвариантно, следовательно, точка G тоже должна быть серединой отрезка AC. Теперь можно провести прямую BG. На ней можно построить точки O и E, пользуясь инвариантными соотношениями $B'O'=2B'G'$, $B'E'=4B'G'$. Далее, $C'D'\|B'G'$ и $A'F'\|B'G'$. Точку D можно найти разными способами: 1) откладывая

$CD=BO$, 2) проводя $ED \| AB$, 3) проводя прямую AO. Аналогично строится точка F.

10. Изображение окружности. Пример 3. *Построить изображение окружности.*

Пояснение 1. Изображение окружности есть эллипс [1]).

Пояснение 2. Кривая строится по точкам. Для вычерчивания окружности существует инструмент — циркуль. Это — исключительный случай (хотя не единственный: существуют инструменты для вычерчивания некоторых других кривых). Поэтому задачу «построить эллипс» надо понимать так: указать построение, позволяющее получать сколько угодно точек эллипса.

Построение эллипса по сопряженным диаметрам будет дано в п. 32. Здесь мы рассмотрим задачу, более близкую к нашей теме: *построить окружность, если три ее точки*

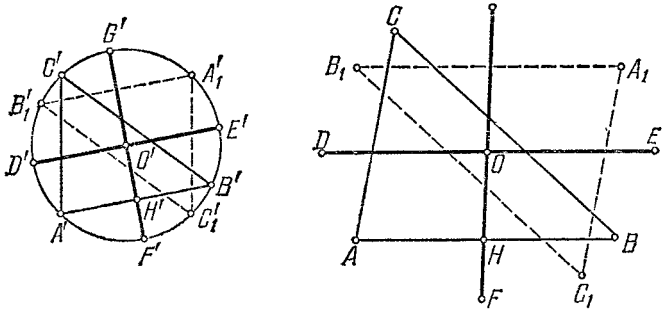

Рис. 10.

изображены произвольно. Другими словами: *изобразить окружность, описанную около треугольника.*

На рис. 10 слева показан оригинал: окружность и вписанный в нее треугольник $A'B'C'$. Изобразим треугольник $A'B'C'$ произвольным треугольником ABC (рис. 10, справа) и построим точку O, изображающую центр окружности (построение не показано).

Если в оригинале для каждой вершины треугольника построить точку, симметричную относительно центра O',

[1]) Если читатель незнаком с эллипсом, то он может найти все нужные сведения в Приложении 2 (стр. 69).

то получим новый треугольник $A_1'B_1'C_1'$, симметричный $A'B'C'$. Его вершины лежат на той же окружности. Изображение треугольника $A_1'B_1'C_1'$ легко построить: строим точки A_1, B_1, C_1, симметричные соответственно A, B, C относительно точки O. Тем самым мы получим еще три точки, принадлежащие изображению окружности.

Прямые, симметричные относительно центра, параллельны между собой. Следовательно, $A'B' \| A_1'B_1'$. Проведем через O' два диаметра $D'E' \| A'B'$ и $F'G' \perp A'B'$. Изображения этих прямых легко построить: $DE \| AB$, а FG проходит через середины отрезков AB и A_1B_1. Концы D, E, F, G определяются из пропорций

$$\frac{OD}{AB} = \frac{O'D'}{A'B'}, \qquad \frac{OF}{OH} = \frac{O'F'}{O'H'}$$

(H' — точка пересечения $F'G'$ с $A'B'$, H — середина AB).

Таким образом, мы построили два сопряженных диаметра эллипса DE и FG, изображающих два перпендикулярных диаметра окружности $D'E'$ и $F'G'$. По сопряженным диаметрам можно построить эллипс (см. п. 32).

11. Другая точка зрения на построение изображений плоских фигур. Каждую точку можно построить по координатам, но для этого сначала надо выбрать систему координат.

Аффинная система координат (на плоскости) состоит из следующих элементов (рис. 11):

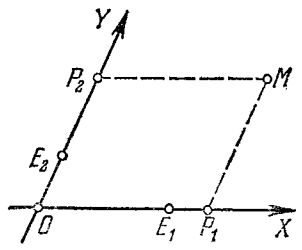

Рис. 11.

1) Две пересекающиеся прямые; точку пересечения обозначим буквой O.

2) На каждой прямой выбрано положительное направление; оно отмечено стрелкой.

Прямая, на которой выбрано одно (из двух возможных) направление, называется ориентированной прямой или осью. Поэтому пп. 1) и 2) можно заменить одним: две пересекающиеся оси.

3) Указан порядок осей.

Это значит, что указано, которая из них первая и которая вторая. Для обозначения порядка можно обозначить оси буквами X и Y, или цифрами 1 и 2, или чертить одну

черным карандашом, а другую — красным, или ... Впрочем вряд ли можно перечислить все возможные способы. Важно лишь, чтобы оси различались.

4) На каждой оси задана единица масштаба. Это делается заданием единичных точек E_1 и E_2.

После того как задана аффинная система координат, каждую точку M плоскости можно задать аффинными координатами. Проводим через M прямые MP_2 и MP_1, параллельные соответственно осям X и Y. Аффинными координатами точки M называются числа

$$x = \frac{OP_1}{OE_1}, \qquad y = \frac{OP_2}{OE_2},$$

снабженные знаком + или — по хорошо известному правилу. Подчеркнем, что координаты — отвлеченные (безразмерные) числа, а не отрезки.

Если оси X и Y перпендикулярны и единицы масштаба одинаковы, т. е.

$$\sphericalangle XOY = 90°, \qquad OE_1 = OE_2,$$

то система координат называется декартовой системой, а координаты x и y — декартовыми координатами.

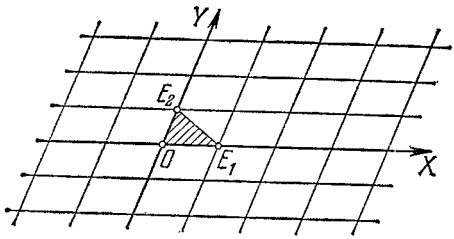

Рис. 12.

Система координат определяет так называемую координатную сетку (рис. 12). Плоскость разграфлена на одинаковые параллелограммы параллельно осям X и Y. Стороны параллелограммов — единицы масштаба по осям X и Y.

Если взять на плоскости точку M, то ее координаты прямо видны из ее положения на сетке. Мы здесь отвлекаемся от того технического затруднения, что если точка M не есть узловая точка сетки (т. е. вершина параллелограмма), то ее координаты приходится отсчитывать на

глаз. Для облегчения этого процесса можно проводить прямые чаще (например, через каждую десятую часть единицы масштаба).

Изображением координатной сетки служит аналогичная координатная сетка из одинаковых параллелограммов. Меняются лишь параметры этих параллелограммов: длины сторон и угол.

Изображение координатной сетки определяет изображение любой точки плоскости. Каждая точка M' изображается точкой M, которая расположена на своей координатной сетке так же, как точка M' на своей. Иначе говоря, *точка M*

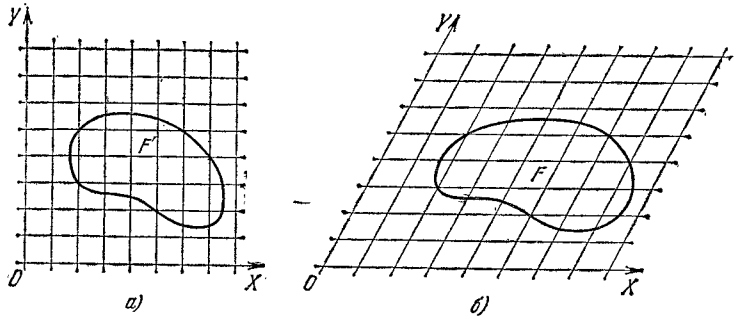

Рис. 13.

(*изображение*) *имеет те же координаты, что и точка M'* (*оригинал*), *но координаты точки M' определяются по отношению к натуральной системе координат* (так принято называть систему-оригинал), *а координаты точки M — по отношению к изображению натуральной системы.*

На рис. 13, *а* показана фигура F', наложенная на координатную сетку (декартову). На рис. 13, *б* произвольно задано изображение системы координат (т. е. координатной сетки) и показано изображение фигуры F.

В предыдущих пунктах говорилось, что при построении изображения плоской фигуры можно *произвольно* задать изображение треугольника, все остальное определится *принудительно*. Настоящий пункт назван «Другая точка зрения...». В нем утверждается, что можно произвольно задать изображение системы координат.

Пусть читатель внимательно смотрит на рис. 11, и тогда ему откроется очень важная истина: *треугольник с индивидуализированными вершинами* (т. е. они должны быть

обозначены буквами или цифрами или еще как-нибудь различены) — *это и есть аффинная система координат.* На рис. 12 отмечен треугольник OE_1E_2. Ясно, что он определяет координатную сетку. Если отмечены точки O, E_1, E_2, то по ним легко достроить координатную сетку.

12. Теорема Польке — Шварца. Мы знаем, что при изображении плоских фигур треугольник играет особую роль. Мы не только знаем этот факт, но и понимаем его глубокое основание: оно заключается в том, что треугольник (с индивидуализированными вершинами) есть система координат. Он есть зародыш координатной сетки. Если бы на рис. 12 почти все стереть, оставив только три точки O, E_1, E_2, то по этим трем точкам можно восстановить весь чертеж.

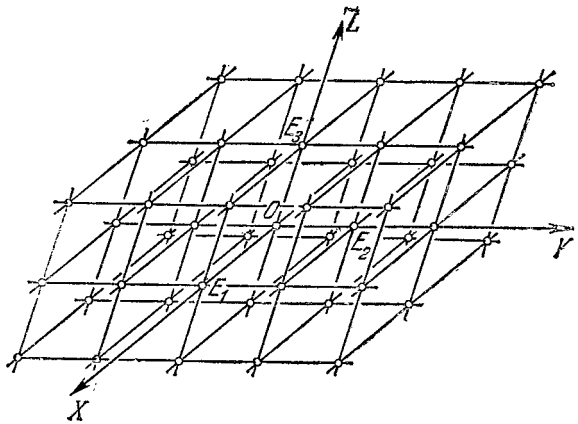

Рис. 14.

Каждому человеку, который это узнал, обязательно приходит в голову мысль, что при изображении пространственных фигур похожую особую роль должен играть тетраэдр.

Почему мы так думаем? Потому что тетраэдр с индивидуализированными вершинами есть пространственная аффинная система координат. (Мы не объясняем, что такое пространственная аффинная система координат — читатель должен понимать это по аналогии с плоской системой.) Тетраэдр есть зародыш пространственной координатной сетки. Если бы от всей сетки остались только точки O, E_1, E_2, E_3 (рис. 14), то по ним можно восстановить сетку.

Эти соображения наводят нас на такое предположение (теорема Польке — Шварца [1]):

Теорема 3. *Любой данный тетраэдр может быть изображен произвольным полным четырехугольником.*

Примечание 1. Полным четырехугольником называется четырехугольник с диагоналями. Точнее говоря, это — плоская фигура, состоящая из следующих элементов: четыре точки общего положения (т. е. никакие три из них не лежат на одной прямой) и шесть отрезков, соединяющих эти точки попарно.

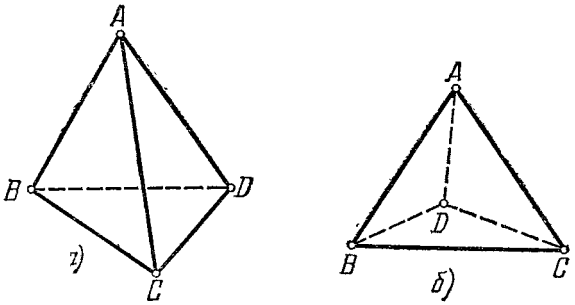

Рис. 15.

Четырехугольник, о котором идет речь в этой теореме, — не обязательно выпуклый. На рис. 15, *а* тетраэдр $A'B'C'D'$ изображен выпуклым четырехугольником $ABCD$ с диагоналями AC и BD. На рис. 15, *б* тот же тетраэдр изображен невыпуклым четырехугольником $ABCD$ (начертите его отдельно, без диагоналей) с диагоналями AC и BD.

Примечание 2. Не подумайте, что пунктирные отрезки это — диагонали. Пунктир используется для обозначения невидимых линий (предполагается, что грани тетраэдра непрозрачны). Как бы ни были расположены точки A, B, C, D, в четырехугольнике $ABCD$ отрезки AB, BC, CD и DA считаются сторонами, а AC и BD — диагоналями.

Примечание 3. Не забудьте, что теорема 3 пока только догадка. Однако потом мы ее докажем. Поэтому мы уже авансом назвали ее теоремой.

---

[1]) Польке доказал эту теорему в 1853 г. для равнобедренного прямоугольного тетраэдра (с равными боковыми ребрами и прямыми плоскими углами при вершине). Шварц в 1864 г. доказал ее для произвольного тетраэдра.

Теперь, после того, как мы сформулировали теорему и дали в примечаниях противоядия против возможных недоразумений, следовало бы перейти к доказательству. Но отложим доказательство еще немного: размышления над смыслом теоремы иногда больше дают для понимания вопроса, чем даже доказательство.

Между теоремами 1 и 3 при всем их сходстве есть глубокое различие. В теореме 1 оригинал — треугольник и изображение — треугольник, т. е. одна плоская система координат изображается другой плоской системой координат.

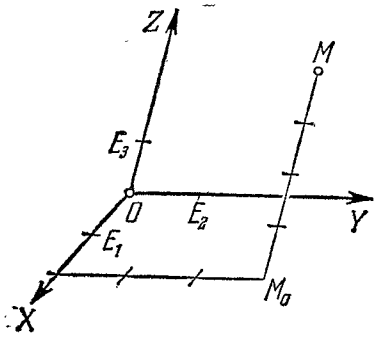

Рис. 16.

В теореме же 3 оригинал — тетраэдр, а изображение — полный четырехугольник, т. е. оригинал и изображение — фигуры разного типа: одна — пространственная, другая — плоская.

Есть еще одно важное различие. При изображении плоской фигуры каждая точка плоскости чертежа есть изображение *единственной* точки плоскости оригинала. Поэтому, чтобы изобразить какую-нибудь точку оригинала, достаточно просто поставить точку на чертеже. При изображении же пространственных фигур каждая точка плоскости чертежа служит изображением бесконечного множества конкурирующих точек, т. е. всей проектирующей прямой. Поставить точку на чертеже — вовсе не значит изобразить определенную точку оригинала.

Выход из этого затруднения таков. Точку M' сначала (т. е. до построения изображения) проектируют из какой-нибудь точки оригинала или параллельно какой-нибудь прямой оригинала на какую-нибудь плоскость оригинала (это называется внутренним проектированием). Обозначим полученную точку M'_0. Затем строятся точки M и M_0 — изображения точек M' и M'_0. Эти две точки определяют положение точки M' в пространстве. Точка M_0 называется вторичной проекцией (хотя лучше было бы: вторичным изображением) точки M'.

Например, рис. 16 построен так: сначала точка M' спроектирована параллельно оси Z' на плоскость $X'Y'$,

затем все это вместе взятое изображено на плоскости. На рис. 16 M — изображение точки M', а M_0 — ее вторичное изображение.

На рис. 19, *б* (см. стр. 27) точка E — вторичная проекция точки M'.

Но вернемся к теореме 3. Ее доказательство основано на следующей лемме.

Л е м м а. *Треугольную призму можно пересечь плоскостью по треугольнику, подобному данному.*

Под треугольной призмой понимается бесконечная «треугольная труба», а не многогранник с пятью гранями. Такую призму можно задать нормальным сечением, т. е. сечением плоскостью, перпендикулярной ребрам.

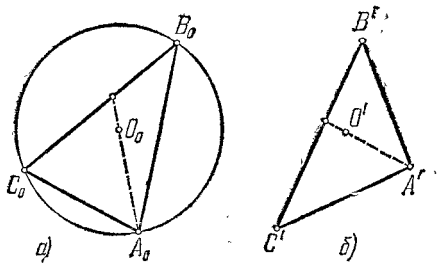

Рис. 17.

Итак, даны два треугольника (рис. 17). Треугольник $A_0B_0C_0$ служит нормальным сечением призмы, а треугольник $A'B'C'$ — образец. Надо пересечь призму плоскостью так, чтобы в сечении получился треугольник, подобный $A'B'C'$.

Начнем с исследования задачи. Пусть α — плоскость, перпендикулярная ребрам призмы, а β — искомая плоскость. Плоскость α сечет призму по треугольнику $A_0B_0C_0$, а плоскость β — по треугольнику $A''B''C''$, который подобен треугольнику $A'B'C'$.

Рассмотрим параллельную проекцию плоскости α на плоскость β. Направление проектирования параллельно ребрам призмы. Треугольник $A_0B_0C_0$ проектируется в треугольник $A''B''C''$. Опишем около треугольника $A_0B_0C_0$ окружность (рис. 17). Она спроектируется в эллипс, описанный около треугольника $A''B''C''$. Проектирующие ее прямые образуют *цилиндр, описанный около призмы.* Подвергнем треугольник $A''B''C''$ вместе с описанным эллипсом подобному преобразованию так, чтобы он превратился в треугольник

ник $A'B'C'$. При этом эллипс перейдет в эллипс, описанный около треугольника $A'B'C'$.

Треугольник $A'B'C'$ вместе с описанным эллипсом есть изображение треугольника $A_0B_0C_0$ вместе с описанной окружностью, потому что первая упомянутая фигура получена из второй параллельным проектированием и последующим подобным преобразованием. Но в таком случае эллипс, описанный около треугольника $A'B'C'$, вполне определен

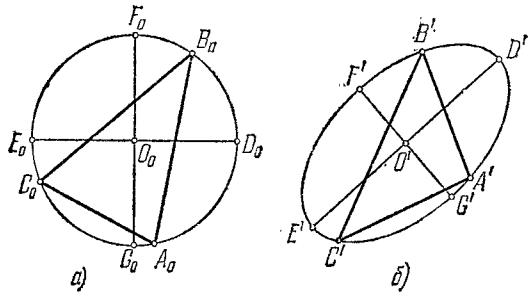

Рис. 18.

и даже легко строится по точкам (это построение описано в п. 10, см. рис. 10). На рис. 17, *б* показан центр эллипса.

Проведем оси эллипса — большую ось $D'E'=2a'$ и малую ось $F'G'=2b'$ (рис. 18) и построим в окружности взаимно перпендикулярные диаметры D_0E_0 и F_0G_0, соответствующие этим осям (т. е. те диаметры, изображениями которых служат оси эллипса). Переходя к построению, покажем, как «посадить» на цилиндр фигуру (эллипс с вписанным треугольником), подобную только что построенной.

Если круговой цилиндр пересечь плоскостью, то в сечении получится эллипс, у которого:

1) малая ось равна диаметру нормального сечения,

2) отношение полуосей равно косинусу угла между секущей плоскостью и нормальной плоскостью (см. п. 31).

Исходя из этого:

1) Проведем в плоскости α *какую-нибудь* прямую, параллельную F_0G_0.

2) Через эту прямую проведем плоскость β под углом $\varphi = \arccos\frac{b'}{a'}$ к плоскости α. Заметим, что таких плоскостей две, потому что угол φ можно отложить по разные стороны от плоскости α.

Построенная таким образом плоскость β сечет цилиндр по эллипсу с данным отношением полуосей. Концы его малой оси F'' и G'' лежат «над» точками F_0 и G_0 (т. е. на тех же образующих). Точки A'', B'', C'' лежат на тех же образующих, что и точки A_0, B_0, C_0. В самом деле, треугольник $A''B''C''$ расположен относительно креста ($D''E''$, $F''G''$) так же, как треугольник $A_0B_0C_0$ относительно креста (D_0E_0, F_0G_0). Точнее говоря, точка A'' (аналогичное утверждение относится к точкам B'' и C'') имеет относительно координатной системы ($O''D''$, $O''F''$) те же аффинные координаты, какие имеет точка A_0 относительно координатной системы (O_0D_0, O_0F_0).

Теперь перейдем к доказательству теоремы 3. Пусть дан тетраэдр $A'B'C'D'$ (оригинал) и плоский четырехугольник $A^0B^0C^0D^0$ (образец). Доказательство основано на следующей идее. Тетраэдр имеет три пары противоположных ребер:

$$A'B' \text{ и } C'D',$$
$$A'C' \text{ и } B'D',$$
$$A'D' \text{ и } B'C'.$$

Противоположные ребра тетраэдра скрещиваются, а соответствующие прямые в составе плоского четырехугольника пересекаются. Таким образом, плоская фигура, вообще говоря, имеет три точки (они называются *диагональными точками* полного четырехугольника), которых пространственная фигура не имеет. Обозначим их

P^0 — точка пересечения A^0B^0 и C^0D^0,
Q^0 — точка пересечения A^0C^0 и B^0D^0,
R^0 — точка пересечения A^0D^0 и B^0C^0.

Не исключено, что одна из этих точек отсутствует (если прямые, которые должны ее определять, параллельны). Могут отсутствовать даже две точки, но не три.

Оказывается, *диагональные точки определяют направление проектирования*. Вот как это происходит.

Определим на ребре $A'B'$ точку P'_1, которая делит его в том же отношении, в каком точка P^0 делит отрезок A^0B^0, и аналогично определим точку P'_2 на ребре $C'D'$:

$$\frac{A'P'_1}{P'_1B'} = \frac{A^0P^0}{P^0B^0}, \quad \frac{C'P'_2}{P'_2D'} = \frac{C^0P^0}{P^0D^0}.$$

Итак, *одна* точка P^0 образца определяет *две разные* точки P'_1 и P'_2 в составе оригинала. Это — *конкурирующие* точки, т. е. они должны изображаться одной точкой. Это значит, что *прямая* $P'_1P'_2$ — *проектирующая прямая*.

Через все вершины тетраэдра $A'B'C'D'$ проводим прямые, параллельные $P'_1P'_2$. Получим бесконечную четырехугольную призму. В сечении этой призмы *любой* плоскостью (только не проектирующей) получается четырехугольник $ABCD$, для которого

$$\frac{AP}{PB} = \frac{A^0P^0}{P^0B^0},$$

$$\frac{CP}{PD} = \frac{C^0P^0}{P^0D^0}.$$

Но мы проведем не любую плоскость, а такую, которая пересекает треугольную призму $A'B'C'$ по треугольнику ABC, подобному $A^0B^0C^0$. Эта плоскость сечет четырехугольную призму по четырехугольнику $ABCD$, который имеет следующее сходство с четырехугольником $A^0B^0C^0D^0$ (образцом):

треугольник ABC подобен треугольнику $A^0B^0C^0$,

$$\frac{AP}{PB} = \frac{A^0P^0}{P^0B^0},$$

$$\frac{CP}{PD} = \frac{C^0P^0}{P^0D^0}.$$

Из этих условий следует, что четырехугольник $ABCD$ подобен четырехугольнику $A^0B^0C^0D^0$, и теорема 3 доказана.

13. Изображение пространственных фигур. Теорема 4. *Если дано изображение тетраэдра* $A'B'C'D'$, *то тем самым определено изображение каждой точки пространства.*

Доказательство. Пусть $A'B'C'D'$ — оригинал, а $ABCD$ — его изображение на плоскости (рис. 19). Пусть, кроме того, в пространстве дана произвольная точка M'. Покажем, как построить ее изображение. Соединим M' с какой-нибудь вершиной тетраэдра, например с A', и отметим точку пересечения E' прямой $A'M'$ с противоположной гранью $B'C'D'$ (точка E' вовсе не должна обязательно находиться *внутри* треугольника $B'C'D'$). Случай, когда $A'M'$ параллельна плоскости $B'C'D'$, предоставляем читателю рассмотреть самостоятельно. Проводя прямые

$B'E'$, $C'E'$ и $D'E'$, мы получим на сторонах треугольника $B'C'D'$ соответственно точки E'_B, E'_C и E'_D.

Теперь перейдем к изображению. Изображения точек E'_B, E'_C и E'_D можно построить: эти изображения должны делить отрезки CD, DB и BC в таких же отношениях, как

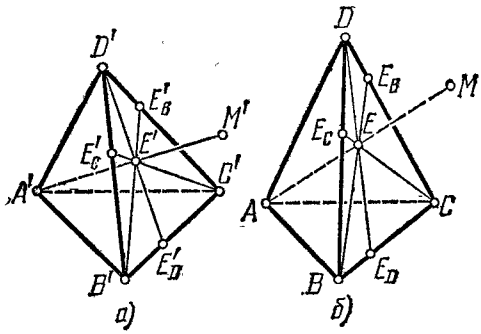

Рис. 19.

это имеет место в оригинале. Впрочем, достаточно построить только две из трех точек, например E_B и E_C. Пересечение прямых BE_B и CE_C дает нам точку E. Далее проводим прямую AE и на ней строим точку M, удовлетворяющую условию

$$\frac{AM}{ME} = \frac{A'M'}{M'E'}.$$

Доказанная теорема может быть истолкована и так: изображение тетраэдра можно дополнить до изображения пространственной системы координат. На рис. 16 дано изображение пространственной системы координат, которое вполне определяется точкой O (изображение начала координат) и точками E_1, E_2, E_3 (изображения единичных точек координатных осей). Имея это изображение, можно построить изображение любой точки, заданной координатами. Например, на рис. 16 показано построение изображения точки $M'(2, 3, 4)$.

Пример 1. *Изобразить куб.*

Три ребра куба, выходящие из одной точки, определяют тетраэдр. По теореме Польке — Шварца он может быть изображен произвольным четырехугольником. Остальная часть изображения достраивается, исходя из того, что

параллельные ребра куба и на чертеже должны быть параллельны.

Таким образом, изображая куб (рис. 20), мы можем точки A_1, B_1, D_1 и A_2 отметить произвольно. Это и есть теорема Польке — Шварца. Большинство людей думает, что такая фигура, как на рис. 20, не всегда может служить изображением куба и что надо особым образом выбирать углы составляющих ее параллелограммов и отношения отрезков. Признайтесь откровенно, читатель, как Вы думали до сих пор? Чертили ли Вы куб совершенно свободно или придерживались определенного стандарта, считая его обязательным?

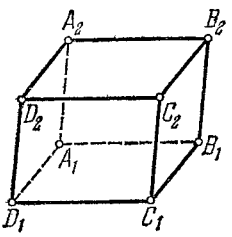

Рис. 20.

Другая форма теоремы Польке — Шварца разрешает нам изображать прямоугольную декартову систему координат произвольно. Например, на рис. 16 мы можем выбрать углы $\measuredangle XOY$ и $\measuredangle YOZ$ произвольно и утверждать, что в оригинале оси X', Y' и Z' попарно перпендикулярны. Кроме того, мы можем взять отрезки OE_1, OE_2 и OE_3 произвольной длины и утверждать, что в оригинале они равны между собой и даже имеют данную длину, например $O'E_1' = O'E_2' = O'E_3' = 1$ *м*. Таким образом, лектор, читающий курс аналитической геометрии в пространстве, может чертить на доске прямоугольную декартову систему координат как угодно, не испытывая при этом никаких угрызений совести.

Пример 2. *Изобразить правильную четырехугольную пирамиду.*

Основание (квадрат) можно изобразить произвольным параллелограммом. Кроме того, согласно теореме Польке — Шварца можно изобразить произвольно одно боковое ребро, т. е. отметить произвольно вершину пирамиды.

Если нужно провести высоту, то следует соединить вершину с точкой пересечения диагоналей основания.

14. Обратимость изображения. До сих пор речь шла о том, при каких условиях оригинал определяет изображение. Но для практики гораздо более важен обратный вопрос. В самом деле, в чем ценность изображения? Только в том, что оно дает информацию об оригинале. Если рабочий должен по чертежу изготовить деталь, то необходимо, чтобы

чертеж вполне определял эту деталь. Рассматривая произведение живописи, мы хотим ясно представить себе оригинал [1]).

Изображение называется обратимым, если по нему можно восстановить (чаще говорят «р е к о н с т р у и р о в а т ь») оригинал.

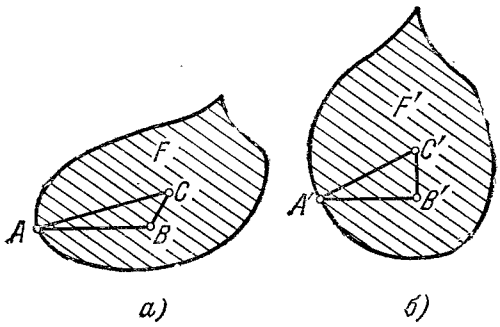

Рис. 21.

Решим сначала вопрос об обратимости изображения плоской фигуры. Пусть F есть изображение плоской фигуры (рис. 21, *а*). Возьмем какие-нибудь три точки A, B, C общего положения, принадлежащие F. Мы знаем, что треугольник ABC может быть изображением *любого* треугольника. Допустим, что в *дополнение* к изображению рис. 21, *а* дано такое условие: в оригинале $A'B'=12{,}4$ *мм*, $B'C'=6{,}2$ *мм*, $\sphericalangle A'B'C'=90°$. Тогда мы можем точно восстановить треугольник $A'B'C'$ рис. 21, *б*. После этого мы можем построить каждую точку фигуры F', т. е. всю фигуру F'.

Как уже объяснялось в п. 11, треугольник играет роль системы координат. Вместо треугольника можно было бы наложить на изображение F координатную сетку и задать ее реконструкцию. Обычно используют ту сетку, которая служит изображением декартовой сетки (хотя это вовсе не обязательно). На рис. 22, *а* показана та же фигура F с наложенной на нее координатной сеткой. В дополнение к рис. 22, *а* сообщается: параллелограммы этой координатной сетки изображают квадраты со стороной 6,2 *мм*. На рис. 22, *б* воспроизведена натуральная координатная сетка и на ней фигура F'.

[1]) Мы надеемся, что любители абстрактной живописи не будут читать эту книжку: теория изображений им ни к чему.

Еще раз подчеркнем, что по изображению ABC треугольника ничего нельзя сказать об оригинале (кроме того, что он — треугольник, а не что-либо другое). Поэтому реконструкция оригинала должна быть сообщена дополнительно.

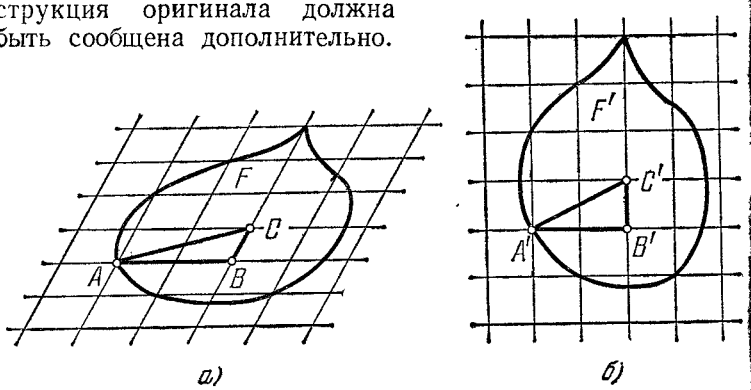

Рис. 22.

Если дано изображение F какой-нибудь плоской фигуры (более сложной, чем треугольник), то:

1) *изображение плоской фигуры необратимо, т. е. по нему нельзя точно определить оригинал,*

2) *изображение станет обратимым, если задать реконструкцию какого-нибудь входящего в его состав треугольника.*

Точнее было бы сказать так. Изображение плоской фигуры в любом случае необратимо, но следующая система обратима: а) изображение, б) дополнительное условие, представляющее реконструкцию какого-нибудь треугольника, входящего в состав изображения. Имея а) и б), можно точно определить оригинал.

Аналогично обстоит дело с изображениями пространственных фигур. Имея изображение тетраэдра, нельзя определить оригинал. В самом деле, согласно теореме Польке — Шварца это изображение может относиться к *любому* тетраэдру. Поэтому реконструкция тетраэдра-оригинала должна быть задана дополнительно. По отношению к более сложным фигурам имеет место следующее положение:

1) *Изображение пространственной фигуры необратимо.*

2) *Оно станет обратимым, если задать реконструкцию тетраэдра, соответствующего какому-нибудь полному четырехугольнику, входящему в состав изображения.*

15. Условные изображения. Изображение называется условным, если в дополнение к нему задаются некоторые условия. Без этих условий точное суждение об оригинале невозможно.

Например, по рис. 20 нельзя сказать, что на нем изображен куб. Это может быть изображение любого параллелепипеда. Но если сказано, что это — куб, значит,— это куб. Мы таким образом имеем условное изображение куба.

Существует выражение, неизвестно кому принадлежащее: «Се лев, а не собака» [1]). Это насмешка над плохим художником, который, не надеясь, что зрители правильно истолкуют его произведение, делает под ним такую пояснительную подпись. Но художник прав: если под изображением написано, что это — лев, значит, оригинал действительно лев. Художник дал условное изображение льва.

Почти все изображения, в том числе и произведения живописи, условны. Поясним это примерами.

В геометрии дополнительные условия формулируются в явной форме: прямо сообщаются размеры некоторого тетраэдра. В технических чертежах имеются промеры (указания размеров) и показывается величина углов.

Архитекторы, изображая фасад здания, часто помещают перед ним фигурки людей и изображения автомобилей. Это заменяет указание масштаба.

В живописи дополнительные условия никогда не формулируются словесно (именно поэтому подпись «се лев, а не собака» кажется нам смешной), однако они существуют в скрытой форме. Заключаются они в том, что на картине изображаются предметы, которые известны зрителю без специальных пояснений. Например, если на картине изображены рельсы, то всякий знает, что они параллельны [2]), и приблизительно представляет расстояние между ними (так что отмечать это расстояние особой надписью не тре-

---

[1]) См. по этому поводу книжку Э. А. Вартаньяна «Из жизни слов», изд. 2-е, М., Детгиз, 1963.

Этот мотив встречается и в фольклоре других народов. Например, Дон Кихот рассказывает об одном живописце («Дон Кихот Ламанчский», часть II, гл. III): «Нарисовал он однажды петуха, да так скверно и до того непохоже, что пришлось написать под ним крупными буквами: „Это петух“».

[2]) Напомним, что в живописи изображение строится не по тем законам, какие излагаются в этой книжке. В живописи применяются центральные проекции, а не параллельные. Поэтому рельсы на картине не параллельны.

буется). Если изображен телеграфный столб, то известно, что он перпендикулярен рельсам и приблизительно известен его размер и т. д. и т. д. Рассматривая картину, зритель, бессознательно руководствуясь этими условиями, по ним восстанавливает весь оригинал.

Если бы на картине был изображен пейзаж иной планеты, на котором не было бы ни одного знакомого предмета, то представить точно оригинал было бы невозможно. Однако даже и в этом случае некоторые условия подразумевались бы. Например, поверхность планеты мы считали бы горизонтальной, а направление, изображаемое параллельно боковым сторонам картины, вертикальным. Невозможно было бы судить о размерах оригинала. Надо просить будущих художников-космонавтов, чтобы для преодоления этого затруднения они включали бы в свои пейзажи хоть один земной предмет.

Выше было сказано, что почти все изображения условны. Почти, но не все. Дополнительные условия необходимы, если мы хотим судить об оригинале вполне точно, но бывают ситуации, в частности при изучении стереометрии, когда метрические свойства оригинала (размеры и углы) не представляют интереса.

Вернемся, например, к рис. 20. Если дополнительных условий нет, то можно сказать, что перед нами изображение *какого-то* параллелепипеда. Если требуется доказать теорему или решить задачу, относящуюся к произвольному параллелепипеду, то в качестве иллюстрации годится рис. 20 без всяких дополнительных условий.

Если речь идет о произвольном тетраэдре, то можно использовать рис. 15 без дополнительных условий. Если же надо изобразить, например, правильный тетраэдр, то придется к тому же рис. 15 добавить условие типа «се лев, а не собака»: «это — правильный тетраэдр» или «$A'B'=A'C'=A'D'=B'C'=B'D'=C'D'$» [1]). Если требуется, указать размер, то можно добавить «$A'B'=a$» или «$A'B'=1$ *см*».

---

[1]) Занимаясь стереометрией, не ставьте штрихов, а пишите $AB=AC=\ldots$, как будто изображение — это и есть тетраэдр. Но в этой книжке, предмет которой — взаимоотношения изображения и оригинала, мы вынуждены быть педантичными.

ГЛАВА II

ПРАКТИКА

16. Сечения многогранников. Теперь мы будем рассматривать изображения, встречающиеся при изучении стереометрии. В первую очередь рассмотрим вопросы, в которых не участвует метрика (т. е. измерение отрезков и углов). Мы намерены не только показывать, как строить изображения, но и разбирать распространенные ошибки.

Пример 1. Пусть требуется изобразить сечение призмы какой-нибудь плоскостью. На рис. 23, *а* изображено сечение треугольной призмы. Оно «построено» очень просто: на ребрах призмы взяты произвольные точки A_3, B_3, C_3 и соединены отрезками прямых. На рис. 23, *б* тот же «метод» применен к построению сечения четырехугольной призмы.

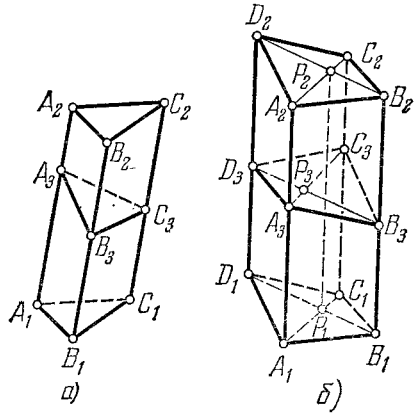

Рис. 23.

Рис. 23, *а* правилен, а рис. 23, *б* — нет. На рис. 23, *б* допущена весьма распространенная ошибка, которую мы сейчас разоблачим.

Плоскость определяется тремя точками. Поэтому, изображая плоское сечение треугольной призмы, мы можем взять точки на ее ребрах произвольно. С четырехугольной призмой так поступить нельзя. Отметив произвольно точки

A_3, B_3, C_3, мы уже определили секущую плоскость, и точка ее пересечения с четвертым ребром призмы не может быть взята произвольно.

А может быть, рис. 23, *б* случайно правилен, т. е. может быть произвольно взятая точка D_3 взята именно там, где она и должна быть? Покажем, как это проверить.

Плоскость, проходящая через ребра $A'_1A'_2$ и $C'_1C'_2$, пересекает плоское сечение $A'_3B'_3C'_3D'_3$ по диагонали $A'_3C'_3$, а плоскость, проходящая через ребра $B'_1B'_2$ и $D'_1D'_2$, — по диагонали $B'_3D'_3$. Прямая пересечения этих двух плоскостей параллельна ребрам призмы. Следовательно, во всех плоских сечениях призмы точки пересечения диагоналей лежат на прямой, параллельной ребрам призмы. На рис. 23, *б* отмечены точки P_1 и P_2 пересечения диагоналей оснований; прямая P_1P_2 параллельна ребрам призмы. Точка P_3 не лежит на этой прямой — следовательно, чертеж неправилен. Это значит, что изображенный на нем четырехугольник $A'_3B'_3C'_3D'_3$ — не плоский. Человек с натренированным глазом, например художник, заметит это сразу, без всяких построений.

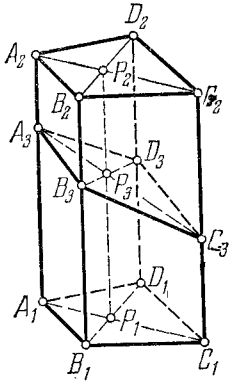

Рис. 24.

Вместо точек P_1, P_2, P_3 можно было бы взять точки пересечения других пар прямых. Например: Q_1 — точка пересечения A_1B_1 и C_1D_1 и аналогичные ей точки Q_2 и Q_3 должны лежать на прямой, параллельной A_1A_2. Также R_1 — точка пересечения A_1D_1 и B_1C_1 и аналогичные точки R_2 и R_3 должны лежать на прямой, параллельной A_1A_2.

Это свойство позволяет не только проверить правильность чертежа, но и построить плоское сечение четырехугольной призмы. Отметим произвольно точки A_3, B_3, C_3(рис. 24). Строим точки P_1 и P_2 и проводим прямую P_1P_2 (она окажется параллельной прямой A_1A_2). Проводим прямую A_3C_3. Находим точку P_3 пересечения A_3C_3 и P_1P_2. Проводим B_3P_3. Точка пересечения B_3P_3 с D_1D_2 и есть искомая.

Рассмотрим еще два примера, но предварительно мотивируем их подбор. В этой книжке мы рассказываем о том, как изображать пространственные фигуры, а не о том, как решать на чертеже задачи на построение. Вторая из этих

двух тем представляет высшую ступень по отношению к первой. Поэтому мы будем рассматривать только такой вопрос: «изобразить *какое-нибудь* плоское сечение многогранника». Вторая тема требует построения плоских сечений, удовлетворяющих определенным условиям, например: «построить сечение многогранника плоскостью, проходящей через три данные точки». Эта задача — более сложная, особенно если точки заданы не на ребрах.

Изображение плоских сечений многогранников требует использования только двух правил:

1) *Если плоскости* β' *и* γ' *пересекаются по прямой* l', *а плоскость* α' *пересекает их соответственно по прямым* b' *и* c', *то* b' *и* c' *либо пересекаются в точке, лежащей на* l' *либо параллельны* l'.

2) *Если плоскости* β' *и* γ' *параллельны, а плоскость* α' *пересекает их соответственно по прямым* b' *и* c', *то* b' *и* c' *параллельны.*

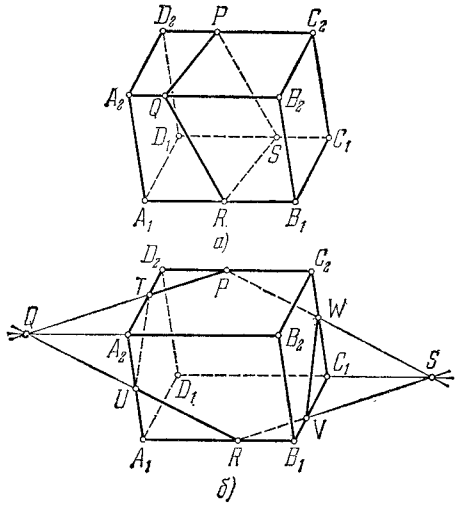

Рис. 25.

Пример 2. *Изобразить плоское сечение параллелепипеда.*

Проводим изображения линий сечения PQ и QR. Точка их пересечения должна лежать на прямой A_2B_2, в остальном прямые PQ и QR произвольны. На рис. 25, *а* точка Q

взята внутри отрезка A_2B_2 (что не обязательно). Далее проводим $RS \| QP$ и $PS \| QR$. Контроль: точка пересечения RS и PS должна оказаться на прямой C_1D_1 (но не обязательно внутри отрезка C_1D_1).

На рис. 25, *б* прямые PQ и QR проведены так, что точка Q попала вне отрезка A_2B_2. Отмечаем точки $T \equiv PQ \times A_2D_2$ и $U \equiv QR \times A_1A_2$ и соединяем U и T. Проводим $RS \| QP$ и $PS \| QR$. Контроль: точка S должна лежать на прямой C_1D_1. Если эта точка попала на продолжение отрезка C_1D_1, то соединяем точки $V \equiv RS \times B_1C_1$ и $W \equiv PS \times C_1C_2$. Контроль: $VW \| TU$.

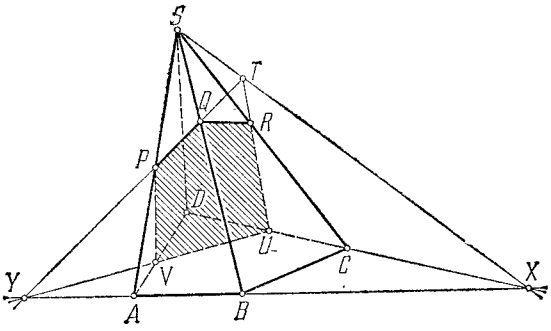

Рис. 26.

Пример 3. *Изобразить плоское сечение четырехугольной пирамиды* (рис. 26).

Проводим звенья PQ и QR произвольно. От точки R надо вести линию сечения по задней грани. Плоскости передней и задней граней пересекаются по прямой $S'X'$. Изображение этой прямой легко получить, построив точку $X \equiv AB \times CD$. Следы секущей плоскости α' на передней и задней гранях должны пересекаться на $S'X'$. Находим точку $T \equiv PQ \times SX$ и проводим TR. Отмечаем отрезок этой прямой RU, оказавшийся внутри треугольника SCD. AB изображает линию пересечения передней и нижней граней. Значит, след секущей плоскости на передней грани $(P'Q')$ и неизвестный пока след на нижней грани $U'V'$ должны пересекаться на $A'B'$.

17. Метрические задачи. Пример 1. *Правильную четырехугольную пирамиду $S'A'B'C'D'$ пересечь какой-нибудь плоскостью, перпендикулярной ребру $S'A'$.*

Основание правильной четырехугольной пирамиды — квадрат. Его можно изобразить произвольным параллелограммом (рис. 27). Кроме того, согласно теореме Польке — Шварца можно еще произвольно изобразить какое-нибудь боковое ребро, например, $S'A'$.

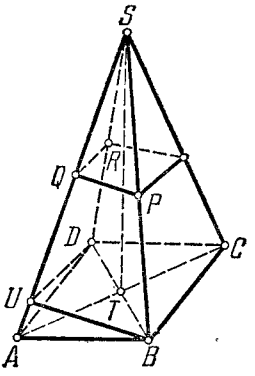

Рис. 27.

Таким образом, будет произвольно изображен тетраэдр $S'A'B'C'$. Однако теорема Польке — Шварца утверждает, что можно произвольно изобразить *данный* тетраэдр, а в нашей задаче тетраэдр $S'A'B'C'$ не дан, потому что не задана длина бокового ребра (или, вместо него, высоты). Добавим еще одно условие, например

$$S'T'=2\cdot A'B'.$$

Только теперь задача станет определенной.

На рис. 28 треугольник $S'A'B'$ изображен в натуральном виде, т. е. без искажения. Точка E' — середина $A'B'$, $A'B'=a$, $S'E'=\frac{a\sqrt{17}}{2}$. Из вершины B' проведена высота $B'U'$.

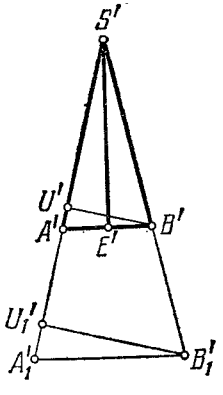

Рис. 28.

Теперь надо перенести точку U' на изображение. Отношение $\frac{S'U'}{U'A'}$ инвариантно. Применим метод подобия. Отложим на рис. 28 $S'A'_1=SA$. Изменяя подобно весь чертеж, получим треугольник $S'A'_1B'_1$ и в нем высоту $B'_1U'_1$. Остается перенести размер $S'U'_1$ на рис. 27, т. е. отложить $SU\equiv S'U'_1$.

Теперь $S'A'\perp U'B'$ и $S'A'\perp U'D'$. Следовательно, $S'A'$ перпендикулярно плоскости $B'U'D'$. Эту плоскость можно переместить параллельно самой себе. При этом на рис. 27 изображения UB и UD следов плоскости заменятся параллельными прямыми PQ и QR. Это сечение дальше достраивается по правилам, изложенным в п. 16.

Замечание. Если бы не был задан размер высоты или бокового ребра, а было бы только задано, что пирамида

правильная, то задача была бы неопределенной. В этом случае можно было бы решить обратную задачу. Проведем BUD произвольно (см. опять рис. 27) и объявим, что $B'U'D' \perp S'A'$. Тогда можно определить размер высоты или бокового ребра пирамиды. Для этого вычертим отдельно отрезок SA с точкой U (рис. 29).

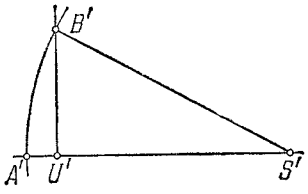

Рис. 29.

На рис. 29 взято $\frac{S'U'}{U'A'} = \frac{SU}{UA}$, например, можно взять $S'U' = SU$, $S'A' = SA$. На рис. 27 прямая BU не перпендикулярна SA, а в оригинале (рис. 29) мы в точке U' восставляем перпендикуляр к $S'A'$. При помощи засечки из S' радиусом $S'A'$ получаем точку B'. Теперь треугольник $S'A'B'$ есть в натуральном виде боковая грань пирамиды (с точностью до подобия).

18. Круглые тела.

Цилиндр. Цилиндр изображен на рис. 30. Оба основания изображаются одинаковыми эллипсами. На рис. 30, *а* изображены два перпендикулярных диаметра

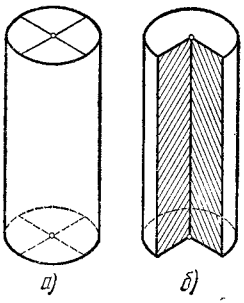

Рис. 30.

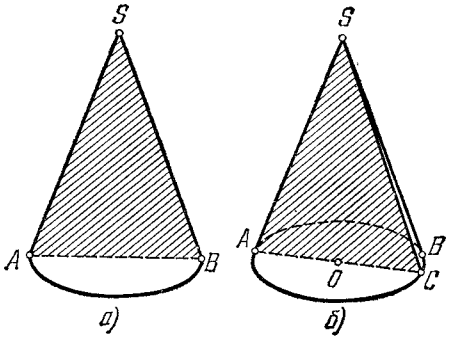

Рис. 31.

верхнего (и нижнего) основания. Они изображаются сопряженными диаметрами эллипса.

На рис. 30, *б* для наглядности из цилиндра сделан вырез с двугранным углом 90°.

Конус. Основание конуса изображается эллипсом. В школьной практике (даже в учебниках) часто встречается

следующая ошибка: крайние образующие используются для изображения осевого сечения, причем предполагается, что они касаются эллипса в концах большой оси (рис. 31, *а*). Это — нелепость. Если из точки S провести касательные к эллипсу и соединить точки касания A и B, то прямая AB не пройдет через центр эллипса. Однако некоторые «чертежники» проводят ее через центр насильственно. Рис. 31, *б* — правильный. Одна из точек касания, например A, соединяется с центром O, и на эллипсе отмечается точка C, диаметрально противоположная A. Треугольник SAC есть изображение осевого сечения.

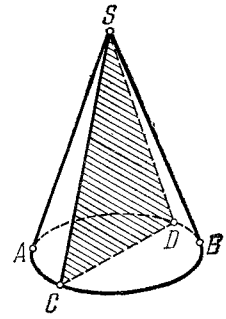

Рис. 32.

Рис. 31, *б* ясно показывает, что мы видим не половину боковой поверхности конуса, а несколько больше. Интересно знать, где находится глаз наблюдателя, если он видит конус так, как изображено на рис. 31, *б*. Он находится очень далеко, выше плоскости основания (лучи, идущие в глаз, образуют с плоскостью основания углы примерно в 30°).

Для изображения осевого сечения вовсе не обязательно использовать одну из абрисных [1]) образующих. Можно использовать любые две диаметрально противоположные образующие. На рис. 32 показан другой вариант изображения конуса с осевым сечением.

Ш а р. Начнем с одного практического замечания: шар принято изображать в ортогональной проекции. Причина этого следующая. При проектировании шара проектирующие прямые образуют круговой цилиндр, касающийся сферы (рис. 33). Плоскость α' перпендикулярна образующим цилиндра, а плоскость β' — нет; α' сечет цилиндр по кругу, а β' — по вытянутому эллипсу, т. е. проекция шара на α' есть круг, а на β' — вытянутый эллипс.

Изображение шара, при котором его абрис — вытянутый эллипс, кажется не наглядным. Большинство людей скажет, что оно «не похоже на шар». Поэтому принято при проектировании шара использовать плоскость α', а не β'.

---

[1]) Абрис — контур всего изображения. Все точки изображения лежат внутри абриса.

Но может ли быть, что изображение, построенное правильно (т. е. без ошибок), окажется не наглядным? Как видно из этого примера, да. Правильность — необходимое, но не достаточное условие наглядности. О достаточных условиях будет сказано в п. 22.

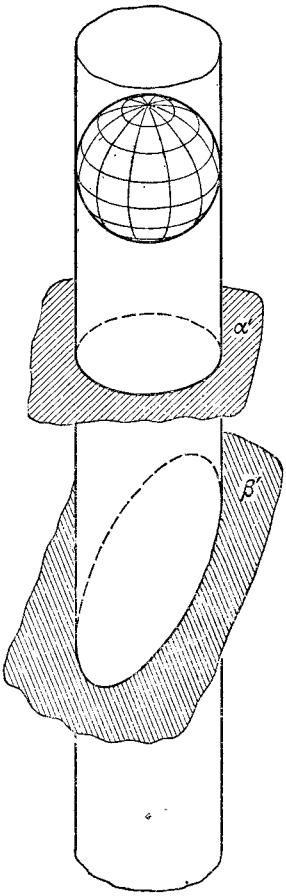

Рис 33.

В учебниках иногда встречается ошибочное изображение шара (рис. 34). Для краткости описаний мы будем пользоваться географическими терминами «экватор», «меридиан», «Северный полюс», «Южный полюс», как будто это — земной шар.

На рис. 34 экватор изображен эллипсом, нижняя часть которого соответствует видимой части экватора. Это значит, что проектирующие лучи наклонны к плоскости экватора и пересекают ее сверху вниз (считая, что они исходят из глаза наблюдателя). Но тогда изображения полюсов не могут находиться на абрисе. Северный полюс должен находиться ниже (т. е. он виден вместе с некоторой окрестностью), а Южный полюс находится на невидимой задней части сферы (рис. 35).

Если же исходить из того, что полюсы находятся на абрисе, то отсюда следует, что проектирующие лучи параллельны плоскости экватора. Тогда экватор будет изображаться отрезком (рис. 36).

Правильное изображение шара строится так. Экватор и меридианы изображаются эллипсами, причем все меридианы проходят через две точки N и S. Остается только выяснить связь между изображением экватора и положением точек N и S.

Если эллипс, изображающий экватор, сплющен в отрезок, то точки N и S находятся на абрисе. Если эллипс рас-

ширяется, то точки N и S сближаются. *Чем шире эллипс, тем ниже* N (*тем выше* S). Это положение мы сейчас уточним.

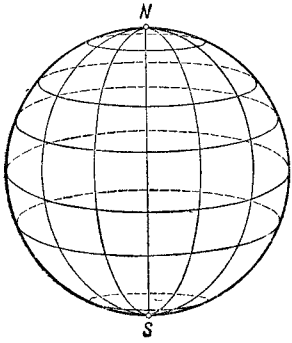

Рис. 34.

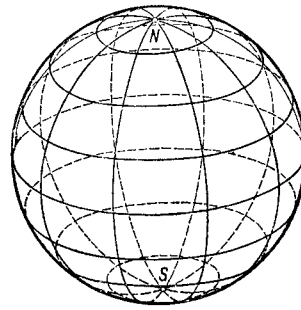

Рис. 35.

Представим себе оригинал. Проведем экваториальное сечение (круг $A'B'C'D'$) и перпендикулярный к нему диаметр $N'S'$ («земная ось»). Вообразим, далее, плоскость, перпендикулярную $A'C'$ и (для удобства) проходящую вне шара (рис. 37). Шар вместе с экваториальным сечением и осью $N'S'$ спроектируем ортогонально на плоскость β'. Шар спроектируется в круг, а система $(A'B'C'D', N'S')$—в два перпендикулярных диаметра этого круга.

Если фигуру слева (рис. 37) вращать вокруг $A'C'$, то круг на плоскости β' будет оставаться на месте, а крест из двух его перпендикулярных диаметров будет вращаться вокруг центра.

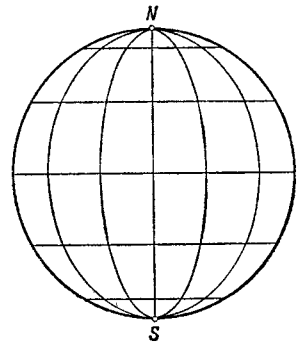

Рис. 36.

Рис. 38 дает ключ к решению вопроса о том, как связаны изображение экватора с изображениями полюсов. Диаметр PQ определяет малую ось эллипса, а NS — положение полюсов N и S. Этот чертеж не требует пояснений, читатель

разберется в нем сам. Руководствуясь этим чертежом, можно решить следующие две задачи:

1) Дано изображение экватора в виде эллипса. Найти полюсы.

2) Даны полюсы. Построить изображение экватора.

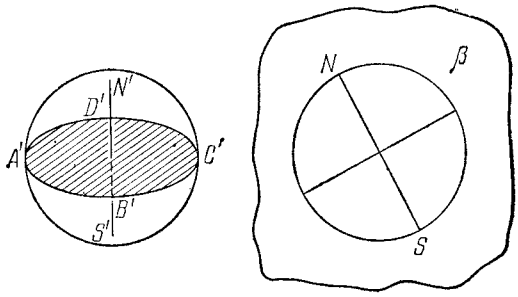

Рис. 37.

После того как экватор и полюсы изображены, легко вычертить координатную сетку (меридианы и параллели) на шаре (рис. 35). Меридианы изображаются эллипсами, проходящими через точки N и S. Параллельные круги изображаются подобными эллипсами, касающимися абриса.

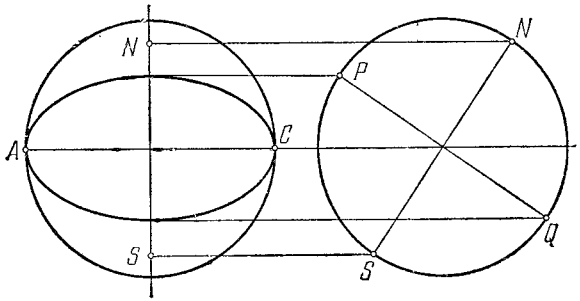

Рис. 38.

Подробности (построение осей всех эллипсов) мы опускаем: все остальное читатель дорисует на глаз.

Разумеется, изображая шар, вовсе не обязательно показывать координатную сетку на нем. Оригинал может быть «чист», т. е. на его поверхности ничего не начерчено. Но в таком случае изображение шара сведется только к кругу

(абрису). Оно будет невыразительно, и нельзя будет догадаться, что это — изображение шара. Чтобы изображение передавало выпуклость шара, надо либо нанести на его поверхность какой-нибудь чертеж (например, координатную сетку), либо показать на изображении т е н и. Построение теней — один из разделов начертательной геометрии. В этой книжке мы не будем касаться построения теней.

19. Изображение плоскости. Изображая метрически данный оригинал, мы первые шаги делаем произвольно. Однако каждый шаг нас несколько связывает, и произвола остается меньше. Наконец, произвол исчерпан (когда мы

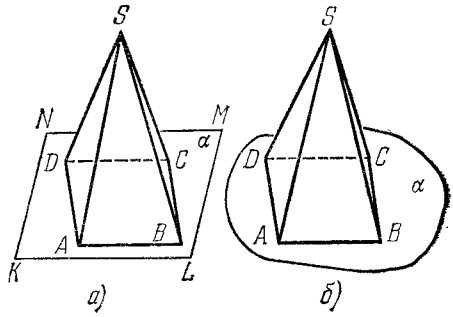

Рис. 39.

изобразили какой-нибудь тетраэдр, входящий в состав оригинала), и все остальные элементы изображения должны строиться.

В учебниках широко распространено обыкновение изображать плоскость (точнее говоря, «кусок плоскости») в виде параллелограмма. Предполагается, что оригинал — *прямоугольный* кусок плоскости.

Изображая прямоугольный кусок плоскости определенным параллелограммом, мы непроизводительно расходуем часть произвола, имеющегося в нашем распоряжении. Если же мы об этом забываем и в дальнейшем пользуемся теоремой Польке — Шварца, то приходим к грубым ошибкам. Вот примеры.

На рис. 39 изображена правильная четырехугольная пирамида, стоящая на плоскости. Изображение $SABCD$, *отдельно взятое*, построено правильно (см. п. 13, пример 2), но рис. 39, *а* в целом грубо ошибочен. Изобразив

прямоугольный кусок плоскости параллелограммом $KLMN$, мы уже частично использовали произвол, предоставляемый теоремой Польке — Шварца, и не имеем права изображать квадрат $A'B'C'D'$ произвольным параллелограммом. На рис. 39, *а* $\sphericalangle NKL$ и $\sphericalangle DAB$ изображают прямые углы. $AB \| KL$, следовательно, должно быть $AD \| KN$. Поскольку этого нет, рис. 39, *а* ошибочен.

Этой ошибки можно было бы избежать, проведя $AD \| KN$. Однако прямоугольность куска плоскости не имеет никакого значения при изучении свойств стоящей на ней пирамиды.

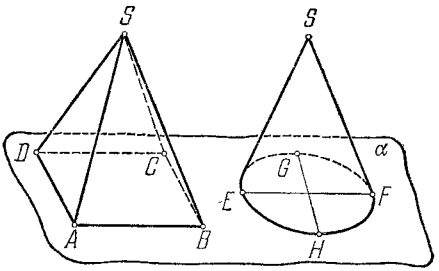

Рис. 40.

Поэтому нет смысла связывать себя условием, что $\sphericalangle LKN$ — изображение прямого угла, и тем самым усложнять дальнейшие построения. Вот почему целесообразно изображать плоскость куском «с оборванными краями» (рис. 39, *б*). Такое изображение плоскости не связывает нас никакими условиями. Изображая четырехугольную пирамиду, поставленную на эту плоскость, мы имеем такую же свободу действий, как при изображении той же пирамиды в пустом пространстве.

Вот еще одна коварная ошибка. На рис. 40 изображены правильная четырехугольная пирамида и прямой круговой конус, поставленные на плоскость α с оборванными краями. Если бы каждое из этих тел имело отдельную «подставку», то все было бы правильно. Но когда мы ставим их на общую плоскость, то основание каждого тела определяет на этой плоскости свою метрику, и эти метрики могут не совпадать.

Возьмем на рис. 40 прямую AB и найдем направление, перпендикулярное ей. $ABCD$ — изображение квадрата. Следовательно, $A'D' \perp A'B'$. Проведем теперь в эллипсе диаметр $EF \| AB$ и построим диаметр GH, сопряженный с

EF. Таким образом, $G'H' \perp E'F'$. Таким образом, направление, перпендикулярное AB, в «метрике пирамиды» изображается прямой AD, а в «метрике конуса» — прямой GH. Прямые GH и AD не параллельны между собой, и это показывает неправильность рис. 40.

20. Вписанные и описанные фигуры. Точное изображение вписанных и описанных фигур требует громоздких построений. При решении стереометрических задач чертеж играет вспомогательную роль, и нет смысла тратить на его выполнение больше труда, чем на решение самой задачи. Поэтому мы рекомендуем читателю в основном чертить на глаз. Однако отметим некоторые основные положения, нарушение которых приведет к грубым ошибкам.

1. Вписанный и описанный шар. Изображение шара сложнее, чем многогранников, цилиндра и конуса. Поэтому рекомендуется, выполняя чертежи с участием шара, *начинать с шара, а затем пристраивать к нему остальные фигуры.*

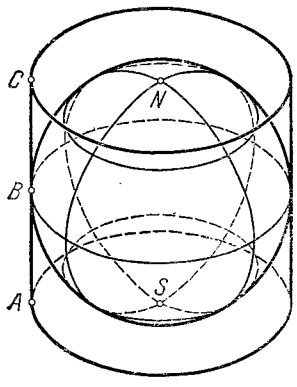

Рис. 41.

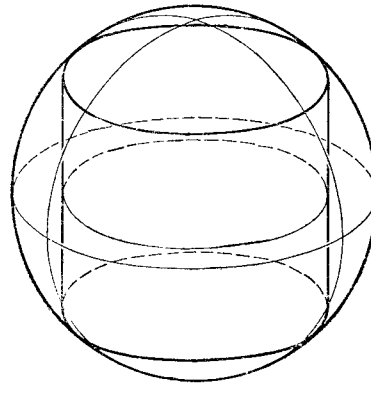
Рис. 42.

2. Шар и цилиндр. Если шар вписан в цилиндр (рис. 41), то боковая поверхность цилиндра касается его по большому кругу, например по экватору. Точка B — на экваторе, $AB=BC$, $AC=NS$. Все три эллипса (экваториальное сечение и основания цилиндра) одинаковы.

Если цилиндр вписан в шар (рис. 42), то следует помнить, что основания цилиндра — одинаковые по размеру параллельные круги.

3. Шар и призма. Если шар вписан в призму (рис. 43), то большой круг (например, экватор) вписан в среднее сечение призмы (сечение плоскостью, параллельной основаниям и проходящей посредине между ними). Поэтому чертеж рекомендуется выполнять в такой последовательности.

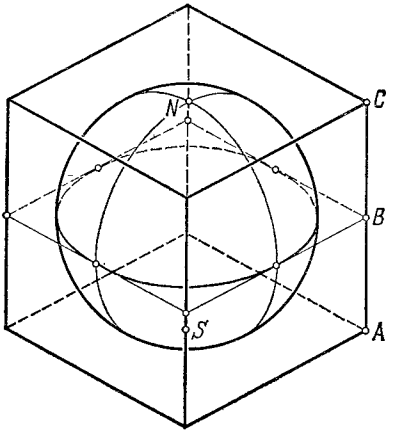

Рис. 43.

1) Изобразить шар.

2) Описать многоугольник около экватора. При этом следует учитывать условия, определяющие этот многоугольник. Например, если это — квадрат (так на рис. 43), то его стороны параллельны сопряженным диаметрам эллипса.

3) Достроить призму по условиям: $AC=NS$, $AB=BC$.

Чтобы изобразить призму, вписанную в шар (рис. 44), надо начать с того, что вписать многоугольник в какой-нибудь параллельный круг. Остальное ясно.

4. Шар и пирамида. Если шар вписан в пирамиду (рис. 45), то точки касания боковых граней находятся на одинаковых расстояниях от вершины пирамиды и, следовательно, лежат на одном параллельном круге, плоскость которого перпендикулярна $T'O'$ (O' — центр шара, T' — вершина пирамиды).

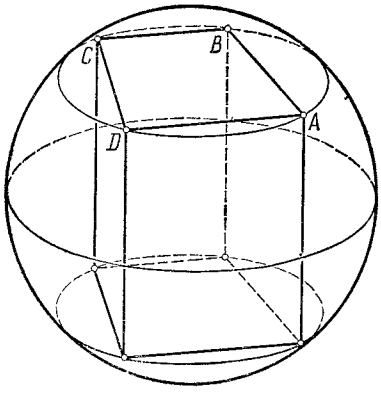

Рис. 44.

Если плоскость основания пирамиды параллельна плоскости, в которой лежат точки касания боковых граней (в частности, это имеет место в правильной пирамиде), то чертить можно в такой последовательности.

1) Изобразить шар с координатной сеткой (меридианы и параллельные круги).

2) Взять какой-нибудь параллельный круг и описать около него многоугольник (например, $A_1B_1C_1D_1$).

3) В точках касания X, Y, U, V провести касательные к меридианам, проходящим через эти точки. Эти касательные пересекаются в одной точке T. Это и будет вершина пирамиды. Соединить ее с точками $A_1B_1C_1D_1$.

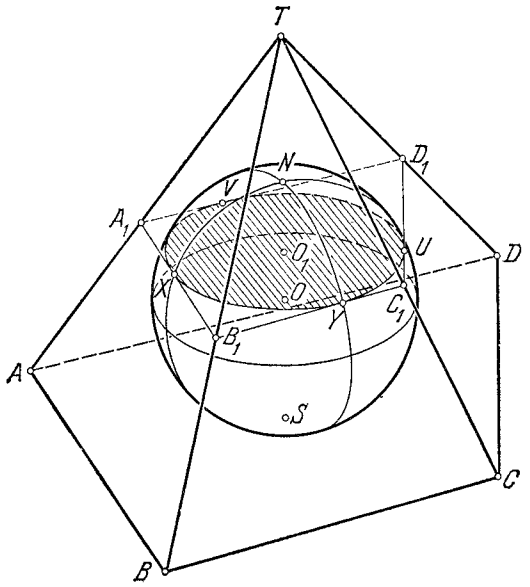

Рис. 45.

4) Достроить пирамиду, руководствуясь пропорцией

$$\frac{TA}{TA_1} = \frac{TS}{TO_1}$$

(S' — Южный полюс, O_1' — центр параллельного круга, вписанного в $A_1'B_1'C_1'D_1'$).

Если плоскость основания пирамиды не параллельна плоскости исходного параллельного круга, то задача много сложнее.

Если шар описан около пирамиды (рис. 46), то основание пирамиды вписано в какой-нибудь параллельный круг, а вершина— любая точка сферы.

5. Разные другие случаи. Подумать самому.

21. Некоторые условности чертежа. В п. 15 говорилось об условиях, дающихся дополнительно к чертежу. Чертеж вместе с этими условиями определяет оригинал метрически точно. Чертеж без дополнительных условий не может определить оригинал метрически точно [1]). В п. 15 имелись в виду условия, сформулированные словесно. Теперь мы рассмотрим некоторые *чертежные условности*, которые усиливают наглядность чертежа. Это несколько туманное выражение следует понимать так: чертежные условности устраняют многозначность в истолковании чертежа. Приведем несколько примеров.

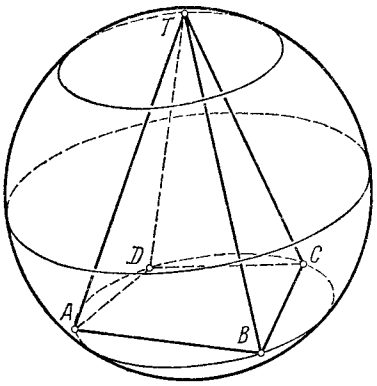

Рис. 46.

Пример 1. На рис. 47, *а* изображены две линии. Нельзя судить, пересекаются ли они. Для устранения этой неопределенности принята следующая условность: если линии пересекаются, то точка пересечения изображений

Рис. 47.

отмечается кружком (рис. 47, *б*), если не пересекаются, то та, которая дальше от глаза наблюдателя, прерывается (рис. 47, *в*).

[1]) Мы имеем в виду чертеж определенного типа: изображение на одной плоскости по методу параллельных проекций. Существуют другие типы чертежей (например, эпюр Монжа, представляющий ортогональные проекции оригинала на *две* перпендикулярные плоскости), определяющие оригинал метрически точно без дополнительных условий.

Пример 2. При изображении поверхности можно считать ее непрозрачной или полупрозрачной. В первом случае линии, которые ею заслонены от глаза наблюдателя, не вычерчиваются. Это допустимо, если чертеж делается с чисто иллюстративной целью (например, изображается какой-нибудь материальный предмет). В стереометрии это неудобно, потому что все линии нужны. Поэтому поверхности считаются полупрозрачными, и линии, проходящие за ними, вычерчиваются пунктиром.

Что изображено на рис. 48, *а*? На этот вопрос нельзя ответить однозначно. Может быть, это — параллелепипед,

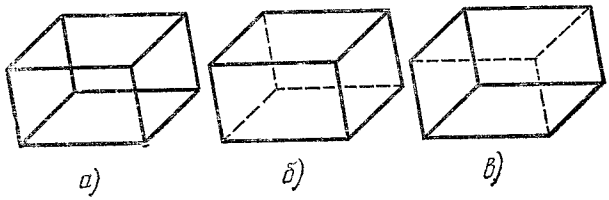

Рис. 48.

а может быть, двенадцать отдельных отрезков, разбросанных в пространстве (возможны еще многие другие толкования).

На рис. 48, *б* и 48, *в* та же фигура оснащена чертежными условностями. Теперь неопределенность исчезла. Ясно, что это — параллелепипед. Параллелепипед на чертежах рис. 48, *б* и 48, *в* расположен по-разному, и эта разница обусловлена только чертежными условностями: фигура одна и та же.

22. От чего зависит наглядность изображения? Как уже говорилось (п. 18), для наглядности изображения необходимо, чтобы оно было правильным, т. е. без ошибок. Ясно, что ошибочный чертеж не может быть наглядным, потому что правила построения изображений соответствуют процессу зрения. Однако правильность изображения недостаточна. На рис. 49 мы видим фотографию человека с вытянутой вперед рукой. Если бы не знали, что это фотография, то, наверное, сказали бы: «Не может быть. Не похоже. Художник ошибся». Но фотоаппарат не может ошибаться, и изображение рис. 49 правильно, но тем не менее не похоже.

Может ли куб быть изображен так, как на рис. 50? Теорема Польке — Шварца говорит, что да, однако большинство людей скажет: «Это — не куб». В чем же дело?

Для того чтобы изображение было наглядным, кроме правильности необходимы еще два условия. Первое: оригинал должен быть показан *с обычной точки зрения*. Обычно, рассматривая предмет, мы помещаем его прямо перед собой

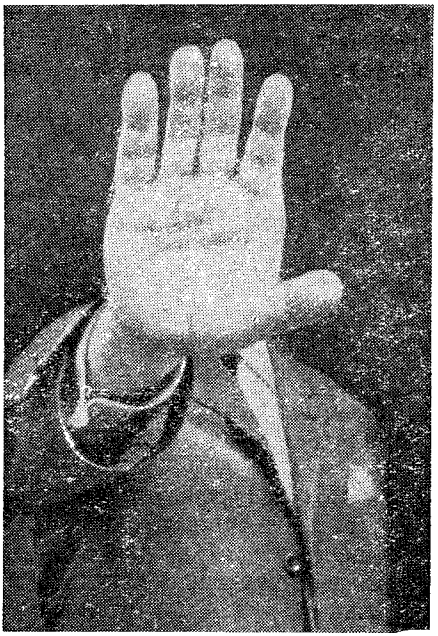

Рис. 49.

(перед глазами). В методе параллельных проекций мы, кроме того, помещаем его *очень далеко* перед собой. Плоскость проекций ставится вертикально между глазом и оригиналом. Таким образом, лучи зрения перпендикулярны плоскости проекций. Чтобы изображение было наглядным, *угол наклона проектирующих лучей к плоскости проекций должен быть* 90° *или близок к* 90°. Чем этот угол дальше от 90°, тем изображение менее наглядно. Иллюстрируем это двумя примерами.

Пример 1. Вернемся к рис. 50 и поставим вопрос так: откуда надо смотреть на куб, чтобы он казался таким?

Неискушенный читатель ответит: «Следует поместить куб несколько ниже глаз и очень далеко вправо. Придется скосить глаза вправо».

Специалист уточнит: «В начертательной геометрии есть формулы, позволяющие по изображению куба установить, как он спроектирован. При получении изображения рис. 50 проектирующие лучи были наклонены к плоскости проекций под углом 14°».

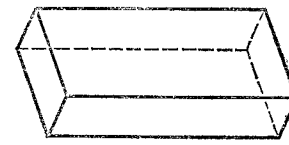

Рис. 50.

Теперь ясно, почему фигура на рис. 50 не похожа на куб: мы не привыкли рассматривать куб в таком положении.

Пример 2. В п. 18 было выяснено, что если проектирование не ортогонально, то изображение шара не наглядно (см. рис. 33).

Возможно, читатель был удивлен: почему мы требовали, чтобы угол наклона проектирующих лучей к плоскости проекций был близок к 90°. Почему не потребовать категорически, чтобы этот угол был точно 90°?

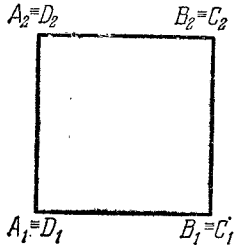

Рис. 51.

Потому что для наглядности требуется еще следующее условие: *важные детали оригинала не должны заслонять друг друга.* Ради соблюдения этого условия иногда несколько отступают от точного значения 90°.

На рис. 51 изображен куб. Сходства никакого, а между тем изображение правильно и угол равен 90°. Направление проектирования параллельно ребру $A_1'D_1'$, плоскость проекций параллельна грани $A_1'B_1'B_2'A_2'$. Так виден куб, если его рассматривать издалека прямо спереди. Наглядность нарушена из-за того, что передние вершины заслоняют задние.

Выполнение всех упомянутых условий вместе достаточно для того, чтобы изображение было наглядным.

ГЛАВА III

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ МЕТОД

23. Теория вычислительного метода. До сих пор мы рассматривали изображения самых простейших фигур. А как быть, если нужно изобразить что-нибудь гораздо более сложное? Проштудировать толстый курс начертательной геометрии? Это целесообразно только для специалистов, а умение грамотно изображать пригодится каждому человеку.

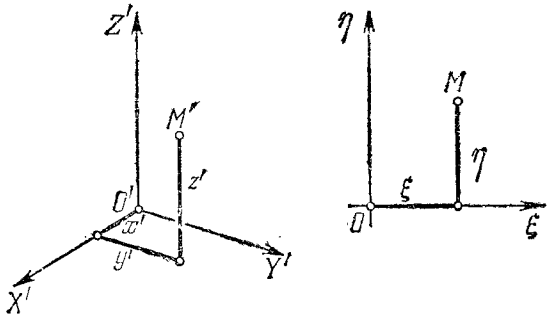

Рис. 52.

Вычислительный метод дает выход из этого затруднения. Как слуховой аппарат помогает человеку с плохим слухом, так вычислительный метод выручает человека, совсем не умеющего рисовать. Ему придется вычислить координаты точек изображения и нанести их на миллиметровку.

Введем в пространстве декартову прямоугольную систему координат (X', Y', Z'), а на плоскости изображений — декартову прямоугольную систему координат (ξ, η) (рис. 52). Каждой точке $M'(x', y', z')$ пространства соответствует ее изображение — точка M (ξ, η) на плоскости. Это значит,

что координаты точки M суть функции координат точки M':

$$\xi = F(x',\ y',\ z'),\quad \eta = G(x',\ y',\ z').$$

Желательно знать, какие это функции. На этот вопрос отвечает следующая теорема.

Теорема. *В методе параллельных проекций координаты точки-изображения суть линейные функции координат точки-оригинала, т. е.*

$$\xi = a_1x' + b_1y' + c_1z' + d_1,\quad \eta = a_2x' + b_2y' + c_2z' + d_2. \quad (1)$$

Примечание. То обстоятельство, что обе системы координат декартовы прямоугольные, не играет роли. Теорема верна для любых аффинных систем. Однако мы будем пользоваться только декартовыми прямоугольными системами. Для наиболее любознательных читателей приводим доказательство этой теоремы в Приложении 1. Кто согласен принять ее на веру — может его пропустить.

Коэффициенты в формулах (1) можно задать произвольно, но изображение, которое получится, может нам не понравиться. Лучше сначала выбрать изображение, а затем подобрать коэффициенты, соответствующие этому изображению.

Выбирая изображение, мы должны не превысить наших прав; можно назначить изображения четырех точек общего положения, изображения же остальных точек определятся сами. За четыре исходные точки проще всего взять начало координат и единичные точки осей.

Обратимся теперь к рис. 53. Слева показан оригинал (пусть читатель считает, что это — не чертеж, а настоящий трехмерный оригинал), а справа — произвольно выбранное изображение. Система (ξ, η) служит для отсчета координат в плоскости изображений. Поскольку положение начала безразлично, условимся для упрощения всегда считать, что изображение начала O' находится в точке $\xi=0$, $\eta=0$. Тогда формулы (1) примут вид

$$\xi = a_1x' + b_1y' + c_1z',\quad \eta = a_2x' + b_2y' + c_2z'. \quad (2)$$

Теперь (см. рис. 53) запишем:
точка A' (1, 0, 0) изображается точкой A ($-a$, $-a$),
точка B' (0, 1, 0) изображается точкой B ($2a$, 0),
точка C' (0, 0, 1) изображается точкой C (0, $2a$).

Подставляя эти числа в формулы (2), определим все коэффициенты $a_1=a_2=-a$, $b_1=c_2=2a$, $c_1=b_2=0$. Таким образом, изображению рис. 53 соответствуют следующие формулы:

$$\xi = a(2y' - x'), \quad \eta = a(2z' - x'). \tag{3}$$

Параметр a позволит регулировать размер чертежа.

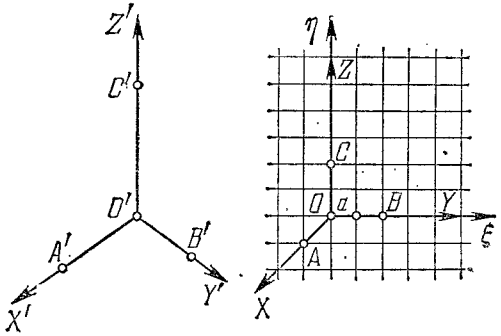

Рис. 53.

Изображение рис. 53, может быть, соответствует неортогональной проекции. А как быть, если нам нужна ортогональная? Есть два способа — аналитический и геометрический. Аналитический основан на использовании формул, определяющих ортогональное проектирование [1]). Лучше обойдемся без него: ведь мы же не собираемся стать специалистами по начертательной геометрии. Геометрический способ не требует никакой теории и основан на непосредственном созерцании. Выберем какое-нибудь направление проектирования, например (для простоты), образующее одинаковые углы со всеми осями координат. Чтобы еще лучше это представить, поставим в первый октант единичный куб (рис. 54). Опять просим читателя поверить, что слева — не чертеж, а настоящий оригинал. Будем проектировать по направлению диагонали куба $G'O'$. За плоскость проекций примем плоскость, проходящую через O' и перпендикулярную $G'O'$ (это очень существенно!). Ясно, что оси X', Y', Z' спроектируются на эту плоскость так, что углы между проекциями будут одинаковы (т. е.

[1])[1], стр. 273.

по 120°), а точки A, B, C окажутся на одном и том же расстоянии от O (рис. 54, справа). Расположим оси (ξ, η), как показано на чертеже. Расстояние OA можно взять любым, потому что изображение не есть непосредственная

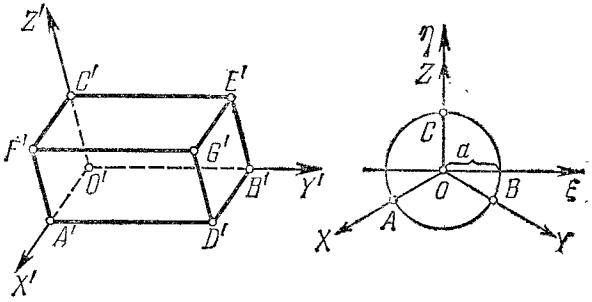

Рис. 54.

проекция, а с последующим преобразованием подобия. Из рис. 54 видно, что:

точка A' (1, 0, 0) изображается точкой $A\left(-\frac{a\sqrt{3}}{2}, -\frac{a}{2}\right)$,

точка B' (0, 1, 0) изображается точкой $B\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}, -\frac{a}{2}\right)$,

точка $C'(0, 0, 1)$ изображается точкой $C(0, a)$.

Определяя из этих условий коэффициенты формул (2) (тем же способом, который уже был объяснен), получим

$$\xi = \frac{a\sqrt{3}}{2}(y' - x'), \quad \eta = \frac{a}{2}[2z' - (x' + y')]. \qquad (4)$$

Итак, формулы (4) соответствуют рис. 54. Из самого способа получения этого чертежа следует, что *изображение, определяемое формулами* (4), *получено ортогональным проектированием.*

24. Практика вычислительного метода. Применим вычислительный метод к построению изображения, значительно более сложного, чем все рассмотренные до сих пор.

Шар пересечен круговым цилиндром. Радиус цилиндра равен половине радиуса шара. Образующая цилиндра прохо-

дит через центр шара. Изобразить шар, цилиндр и линию их пересечения (она называется кривой Вивиани). На рис. 55 изображено сечение данной фигуры плоскостью, проходящей через центр шара и перпендикулярной образующим цилиндра. Радиус шара примем за единицу. Тогда уравнение сферы будет

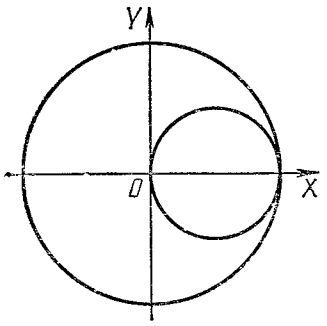

Рис. 55.

$$x'^2+y'^2+z'^2=1, \qquad (5)$$

а уравнение цилиндра

$$\left(x'-\frac{1}{2}\right)^2+y'^2=\frac{1}{4}. \qquad (6)$$

Заметим, что радиус параллельного круга определяется по формуле

$$r=\cos\varphi, \qquad (7)$$

где φ — широта (понятия широты и долготы мы не определяем, заимствуя их из географии). Координаты каждой точки сферы выражаются так:

$$\left.\begin{aligned} x' &= r\cos\theta,\\ y' &= r\sin\theta,\\ z' &= \sin\varphi \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

(φ — широта, θ — долгота, r — радиус параллели, на которой лежит точка).

Построение изображения вычислительным методом состоит из трех шагов:

1) Вычислить координаты точек оригинала.

2) Вычислить (по формулам (2)) координаты точек изображения.

3) Нанести точки на миллиметровку.

Первый шаг. Проведем параллельные круги через каждые 30° и вычислим их радиусы по формуле (7):

φ	$r=\cos\varphi$
0°	1,000
30°	0,866
60°	0,500
90°	0,000

(эти же значения r соответствуют отрицательным значениям φ, т. е. южной широте).

Теперь возьмем на каждой параллели точки через 30° долготы и вычислим их координаты по формулам (8).

Таблица I′: параллель $\varphi=0$, $r=1$ (экватор)

№ точки	θ	x'	y'	z'
1	0°	1,000	0,000	0,000
2	30°	0,866	0,500	0,000
3	60°	0,500	0,866	0,000
4	90°	0,000	1,000	0,000
5	120°	—0,500	0,866	0,000
6	150°	—0,866	0,500	0,000
7	180°	—1,000	0,000	0,000
8	210°	—0,866	—0,500	0,000
9	240°	—0,500	—0,866	0,000
10	270°	0,000	—1,000	0,000
11	300°	0,500	—0,866	0,000
12	330°	0,866	—0,500	0,000

Таблица II′: параллель $\varphi=30°$, $r=0,866$

№ точки	θ	x'	y'	z'
1	0°	0,866	0,000	0,500
2	30°	0,750	0,433	0,500
3	60°	0,433	0,750	0,500
4	90°	0,000	0,866	0,500
5	120°	—0,433	0,750	0,500
6	150°	—0,750	0,433	0,500
7	180°	—0,866	0,000	0,500
8	210°	—0,750	—0,433	0,500
9	240°	—0,433	—0,750	0,500
10	270°	0,000	—0,866	0,500
11	300°	0,433	—0,750	0,500
12	330°	0,750	—0,433	0,500

Таблица III′: параллель $\varphi=60°$, $r=0{,}500$

№ точки	θ	x'	y'	z'
1	0°	0,500	0,000	0,866
2	30°	0,433	0,250	0,866
3	60°	0,250	0,433	0,866
4	90°	0,000	0,500	0,866
5	120°	—0,250	0,433	0,866
6	150°	—0,433	0,250	0,866
7	180°	—0,500	0,000	0,866
8	210°	—0,433	—0,250	0,866
9	240°	—0,250	—0,433	0,866
10	270°	0,000	—0,500	0,866
11	300°	0,250	—0,433	0,866
12	330°	0,433	—0,250	0,866

Таблица IV′: параллель $\varphi=90°$, $r=0$ (Северный полюс)

№ точки	θ	x'	y'	z'
1	—	0,000	0,000	1,000

Таблицы для параллельных кругов южного полушария отличаются только знаком z'. Например, таблица для параллели $\varphi=-30°$ выглядит так: x' и y' — те же, что в таблице II′, $z'=-0{,}500$.

Второй шаг. Вычислим таблицы для координат точек изображения. Выберем изображение, определяемое формулами (4) и положим $a=100$ *мм*. Для экономии места во всех таблицах, кроме таблицы I, мы объединяем по два параллельных круга, для которых широта отличается только знаком: ордината η_1 относится к северной параллели, а η_2 — к южной.

Заметим, что две точки, симметричные относительно плоскости экватора, отличаются только знаком z'. Если по второй формуле (4) сначала вычислить η_1, а затем, заменив z' на $-z'$, вычислить z_2, то получится

$$\eta_1-\eta_2=2az'$$

или (у нас $a=100$ *мм*)

$$\eta_1-\eta_2=200z'.$$

В каждой таблице $z'=\text{const}$. Это делает вычисление η_2 совсем легким. Например, в таблице II $\eta_2=\eta_1-100$.

Таблица I: параллель $\varphi=0$ (экватор)

№ точки	ξ	η
1	—86,6	—50,0
2	—31,7	—68,3
3	31,7	—68,3
4	86,6	—50,0
5	118,3	—18,3
6	118,3	18,3
7	86,6	50,0
8	31,7	68,3
9	—31,7	68,3
10	—86,6	50,0
11	—118,3	18,3
12	—118,3	—18,3

Таблица II: параллели $\varphi=\pm 30°$

№ точки	ξ	η_1	η_2
1	—75,0	6,7	— 93,3
2	—27,5	—9,2	—109,2
3	27,5	—9,2	—109,2
4	75,0	6,7	—93,3
5	102,4	34,2	—65,8
6	102,4	65,8	—34,2
7	75,0	93,3	—6,7
8	27,5	109,2	9,2
9	—27,5	109,2	9,2
10	—75,0	93,3	—6,7
11	—102,4	65,8	—34,2
12	—102,4	34,2	—65,8

Таблица III: параллели $\varphi=\pm 60°$

№ точки	ξ	η_1	η_2
1	—43,3	61,6	—111,6
2	—15,8	52,4	—120,8
3	15,8	52,4	—120,8
4	43,3	61,6	—111,6
5	59,1	77,4	—95,8
6	59,1	95,8	—77,4
7	43,3	111,6	—61,6
8	15,8	120,8	—52,4
9	—15,8	120,8	—52,4
10	—43,3	111,6	—61,6
11	—59,1	95,8	—77,4
12	—59,1	77,4	—95,8

Таблица IV: параллели $\varphi=\pm 90°$ (Северный и Южный полюсы)

№ точки	ξ	η_1	η_2
1	0,0	100,0	—100,0

На этой стадии мы уже можем частично перейти к **третьему шагу** и вычертить изображение шара. Рекомендуем читателю самостоятельно выполнить чертеж, нанося точки

по таблицам I—IV. При этом читателю полезно учесть следующие четыре замечания.

Первое (очень, очень важное!). В таблицах I — IV даны точки параллелей. А как же вычертить изображения меридианов?

Во всех таблицах точки с одинаковыми номерами имеют одинаковую долготу. Поэтому, *соединяя точки с одинаковыми номерами, мы получим изображение меридиана.* Например, все точки, имеющие № 3, лежат на меридиане $\theta=60°$.

Поэтому таблицы I — IV позволяют вычертить изображение всей координатной сетки на сфере.

Второе. Координаты точек в таблицах I — IV даны в миллиметрах. По этим координатам следует наносить точки на миллиметровку без всяких пересчетов. Координаты даны с одной цифрой после запятой, потому что 0,1 *мм* — наибольшая точность, которую способен реализовать хороший чертежник.

Параметр a в формулах (4) позволяют регулировать размеры чертежа. Заметим, что если мы для увеличения масштаба умножим все координаты из таблиц I — IV на некоторый множитель, значительно больший единицы, то и погрешность значительно увеличится. Поэтому для большего чертежа следовало вычислять координаты точек оригинала с большей точностью.

Третье. Абрис шара незачем рассчитывать по точкам. Его следует вычертить циркулем. Центр — (0,0), радиус равен

$$100\sqrt{\frac{3}{2}}\,мм \approx 122{,}5\ мм.$$

Четвертое. Если ставить главной целью наглядность, а не решение геометрических задач, то лучше не чертить невидимых частей линий. Они делают чертеж запутанным.

Теперь займемся кривой Вивиани. Из уравнений (7) и (8) видно, что координаты каждой точки единичной сферы выражаются через широту и долготу этой точки так:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \cos\varphi\cdot\cos\theta,\\ y' &= \cos\varphi\cdot\sin\theta,\\ z' &= \sin\varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Те точки сферы, которые одновременно принадлежат цилиндру, должны одновременно удовлетворять уравнениям (9) и (6). Из этих уравнений получается

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{1}{2}\left(1+\cos 2\varphi\right), \\ y' &= \pm\frac{1}{2}\sin 2\varphi, \\ z' &= \sin\varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Уравнения (10) это — параметрические уравнения кривой Вивиани. Придавая различные значения φ, будем получать точки этой линии. Если придавать φ значения через 15°, то получим 24 точки. Разумеется, вычисления производим только для $0\leqslant\varphi\leqslant 90°$, а координаты остальных точек записываем по симметрии.

Заметим, что можно ограничиться только верхним знаком для y'. При изменении φ от 0 до 360° все равно текущая точка обежит всю кривую. В самом деле, если пользоваться формулами (10) с верхним знаком и положить $\varphi_1=90°-\alpha$ и $\varphi_2=90°+\alpha$, то получим те же две точки, что при пользовании формулами (10) с двойным знаком.

Вычисляем координаты точек изображения по формулам (4) при $a=100$ *мм*.

Для усиления наглядности «высунем» цилиндр чуть-чуть из шара. Проведем сечения цилиндра плоскостями чуть выше и чуть ниже соответствующих полюсов, например $z'=\pm 1{,}1$. Координаты точек оригинала этих сечений можно вычислять по формулам

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{1}{2}\left(1+\cos t\right), \\ y' &= \frac{1}{2}\sin t, \\ z' &= \pm 1{,}1. \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

После всего изложенного читатель легко сделает все расчеты сам. Чертеж на рис. 56 построен на основании результатов, записанных в таблицах (масштаб уменьшен). Невидимые линии не изображены, исключение сделано лишь для кривой Вивиани.

При изображении поверхностей наглядность отчасти зависит от густоты координатной сетки. Рис. 57 отличается от рис. 56 только тем, что параллели и меридианы проведены вдвое чаще: через каждые 15°. Сравните впечатление от каждого чертежа.

Таблица V′: кривая Вивиани

№ точки	φ	x′	y′	z′
1	0°	1,000	0,000	0,000
2	15°	0,933	0,250	0,259
3	30°	0,750	0,433	0,500
4	45°	0,500	0,500	0,707
5	60°	0,250	0,433	0,866
6	75°	0,067	0,250	0,966
7	90°	0,000	0,000	1,000
8	105°	0,067	—0,250	0,966
9	120°	0,250	—0,433	0,866
10	135°	0,500	—0,500	0,707
11	150°	0,750	—0,433	0,500
12	165°	0,933	—0,250	0,259
13	180°	1,000	0,000	0,000
14	195°	0,933	0,250	—0,259
15	210°	0,750	0,433	—0,500
16	225°	0,500	0,500	—0,707
17	240°	0,250	0,433	—0,866
18	255°	0,067	0,250	—0,966
19	270°	0,000	0,000	—1,000
20	285°	0,067	—0,250	—0,966
21	300°	0,250	—0,433	—0,866
22	315°	0,500	—0,500	—0,707
23	330°	0,750	—0,433	—0,500
24	345°	0,933	—0.250	—0,259

Таблица V: кривая Вивиани

№ точки	ξ	η	№ точки	ξ	η
1	—86,6	—50,0	13	—86,6	—50,0
2	—59,1	—33,3	14	—59,1	—85,0
3	—27,5	—9,2	15	—27,5	—109,2
4	0,0	20,7	16	0,0	—120,7
5	15,8	52,4	17	15,8	—120,7
6	15,8	80,8	18	15,8	—112,4
7	0,0	100,0	19	0,0	—100,0
8	—27,5	105,8	20	—27,5	—87,4
9	—59,1	95,8	21	—59,1	—77,4
10	—86,6	70,7	22	—86,6	—70,7
11	—102,4	34,2	23	—102,4	—65,8
12	—102,4	—8,3	24	—102,4	—60,0

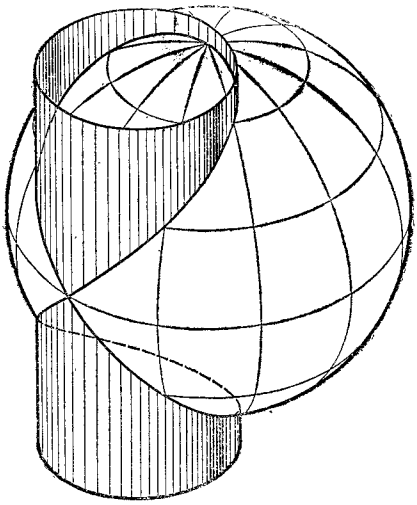

Рис. 56.

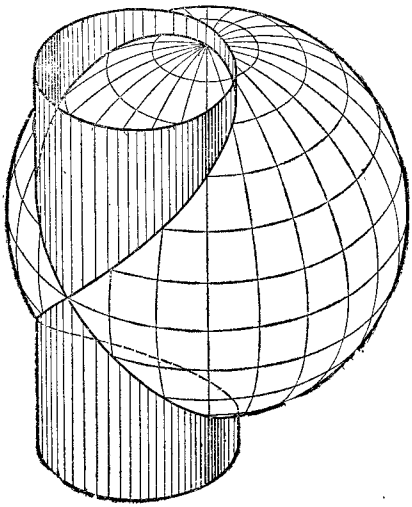

Рис. 57.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

ВЫРАЖЕНИЕ КООРДИНАТ ТОЧЕК ИЗОБРАЖЕНИЯ ЧЕРЕЗ КООРДИНАТЫ ТОЧЕК ОРИГИНАЛА

25. Характеристическое свойство линейной однородной функции. Характеристическое свойство какого-либо объекта или множества объектов это — свойство, которым обладает *только* он, т. е. свойство, отличающее его от всех других. Например, число 2 — простое четное число. Это — его характеристическое свойство.

Функция $f(x)=ax+b$ называется линейной; при $b=0$ она называется линейной однородной.

Если *тождественно*, т. е. *для любых двух значений аргумента* x_1 *и* x_2 имеет место равенство

$$f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2), \tag{12}$$

то говорят, что функция $f(x)$ обладает свойством аддитивности. Ясно, что линейная однородная функция этим свойством обладает. В самом деле, если $f(x)=ax$, то $f(x_1+x_2)=a(x_1+x_2)=ax_1+ax_2=f(x_1)+f(x_2)$. Существуют ли еще функции, обладающие свойством аддитивности? Оказывается, среди непрерывных функций нет: линейная однородная — единственная, т. е. аддитивность — ее характеристическое свойство. Сейчас мы это докажем.

Лемма 1. *Если* $f(x)$ *— непрерывная функция* [1]) *и для любых двух значений аргумента* $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$, *то*

$$f(x)=ax.$$

Примечание. Требование непрерывности не обязательно, лемма справедлива и при более слабых условиях. Мы выдвигаем это условие для упрощения доказательства.

[1]) О непрерывной функции см. Н. Я. Виленкин и С. И. Шварцбурд, Математический анализ, М., 1969, гл. III, § 3.

Доказательство. Пусть α — любое действительное число $\neq 0$. Имеем $f(2\alpha)=f(\alpha+\alpha)=f(\alpha)+f(\alpha)=2f(\alpha)$, $f(3\alpha)=f(2\alpha+\alpha)=f(2\alpha)+f(\alpha)=2f(\alpha)+f(\alpha)=3f(\alpha)$ и далее по индукции $f(n\alpha)=nf(\alpha)$. Если положить $\alpha=1$, $f(1)=a$, то $f(n)=an$, т. е. для натуральных значений аргумента лемма уже доказана. Положим теперь $\alpha=1/q$, где q — натуральное число. По уже доказанному $a=f(1)=f(q\alpha)=qf(\alpha)=qf\left(\frac{1}{q}\right)$, откуда

$$f\left(\frac{1}{q}\right)=a\cdot\frac{1}{q}.$$

Пусть p — тоже натуральное число. Тогда

$$f\left(\frac{p}{q}\right)=p\cdot f\left(\frac{1}{q}\right)=a\cdot\frac{p}{q}.$$

Теперь уже лемма доказана для всех положительных рациональных значений аргумента. Если x — иррациональное число (положительное), то оно может быть представлено как предел последовательности рациональных чисел:

$$r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_n,\ \ldots,\ \lim_{n\to\infty} r_n=x.$$

В силу непрерывности нашей функции

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f(r_n)=\lim_{n\to\infty}(ar_n)=ax.$$

Чтобы распространить лемму на неположительные значения аргумента, заметим, что $f(0)=f(0+0)=2f(0)$, откуда

$$f(0)=0.$$

Далее, пусть $x=-\alpha$, где $\alpha>0$; имеем $f(\alpha-\alpha)=f(0)=0$, но также $f(\alpha-\alpha)=f[\alpha+(-\alpha)]=f(\alpha)+f(-\alpha)$. Отсюда

$$f(x)=f(-\alpha)=-f(\alpha)=-a\alpha=a\cdot(-\alpha)=ax.$$

Теперь лемма доказана полностью для всех действительных чисел. Эта лемма распространяется и на функции нескольких переменных.

Лемма 2. *Функция нескольких переменных, непрерывная по каждому аргументу и обладающая свойством*

аддитивности

$$F(x_1+x_2,\ y_1+y_2)=F(x_1,\ y_1)+F(x_2,\ y_2)\ ^{1}),\qquad (13)$$

есть линейная однородная, т. е.

$$F(x,\ y)=ax+by.$$

Доказательство. При $y=0$ функция $F(x,\ y)$ превращается в функцию одного переменного $F(x,\ 0)$. Полагая в формуле (13) $y_1=y_2=0$, получим $F(x_1+x_2,\ 0)=F(x_1,\ 0)+F(x_2,\ 0)$. Следовательно, по лемме 1 $F(x,\ 0)=ax$. Аналогично доказывается, что $F(0,\ y)=by$.

На основании свойства (13)

$$F(x,\ y)=F(x,\ 0)+F(0,\ y)=ax+by,$$

что и требовалось доказать.

26. Формулы для координат точек изображения. Лемма 3. *Если точки* $O'(0,0,0)$, $M_1'(x_1',y_1',z_1')$, $M_2'(x_2',y_2',z_2')$ *имеют изображения соответственно* $O(0,0)$, $M_1(\xi_1,\eta_1)$, $M_2(\xi_2,\eta_2)$, *то точка* $M_3'(x_1'+x_2',y_1'+y_2',z_1'+z_2')$ *имеет изображение* $M_3(\xi_1+\xi_2,\eta_1+\eta_2)$.

Если точки O', M_1', M_2' не лежат на одной прямой, то $O'M_1'M_2'M_3'$ — параллелограмм, причем O' и M_3' — противоположные вершины. Изображением параллелограмма служит параллелограмм. Точка $M_3(\xi_1+\xi_2,\ \eta_1+\eta_2)$ дополняет треугольник OM_1M_2 до параллелограмма (доказательство: середина отрезка OM_3 совпадает с серединой отрезка M_1M_2). Следовательно, M_3 служит изображением точки M_3'.

Если точки O', M_1', M_2' лежат на одной прямой, то

$$\frac{x_1'}{x_2'}=\frac{y_1'}{y_2'}=\frac{z_1'}{z_2'}\ .\qquad (14)$$

Прибавляя ко всем частям равенств (14) по единице, получаем

$$\frac{x_1'+x_2'}{x_2'}=\frac{y_1'+y_2'}{y_2'}=\frac{z_1'+z_2'}{z_2'}\ ,\qquad (15)$$

т. е. *точка* M_3' $(x_1'+x_2',\ y_1'+y_2',\ z_1'+z_2')$ *лежит на* той же прямой.

Нам дано, что точки O, M_1, M_2 служат изображениями точек O', M_1', M_2'. Это значит, во-первых, что O, M_1, M_2

---

[1]) Ради краткости мы пользуемся символом функции двух переменных, но формулировка леммы и доказательство относятся к функции любого числа переменных.

лежат на одной прямой, т. е.

$$\frac{\xi_1}{\xi_2}=\frac{\eta_1}{\eta_2}, \tag{16}$$

и, во-вторых, что $(M_1M_2O)=(M_1'M_2'O')$. Имеем

$$\left(M_1M_2O\right)=\frac{M_1O}{OM_2}=-\frac{\xi_1}{\xi_2}, \quad (M_1'M_2'O')=\frac{M_1'O'}{O'M_2'}=-\frac{x_1'}{x_2'}.$$

Значит,

$$\frac{\xi_1}{\xi_2}=\frac{x_1'}{x_2'}. \tag{17}$$

Из (16) следует

$$\frac{\xi_1+\xi_2}{\xi_2}=\frac{\eta_1+\eta_2}{\eta_2}.$$

Это значит, что точка $M_3(\xi_1+\xi_2,\ \eta_1+\eta_2)$ лежит на прямой OM_1M_2. Покажем, что она делит M_1M_2 в том же отношении, в каком точка M_3' делит отрезок $M_1'M_2'$:

$$\frac{M_1M_3}{M_3M_2}=\frac{(\xi_1+\xi_2)-\xi_1}{\xi_2-(\xi_1+\xi_2)}=-\frac{\xi_2}{\xi_1}, \quad \frac{M_1'M_3'}{M_3'M_2'}=\frac{(x_1'+x_2')-x_1'}{x_2'-(x_1'+x_2')}=-\frac{x_2'}{x_1'}.$$

Из (17) следует, что

$$\frac{M_1M_3}{M_3M_2}=\frac{M_1'M_3'}{M_3'M_2'}.$$

Значит, точка M_3 служит изображением точки M_3'. Лемма **3** доказана.

Если пространство отображается на плоскость по методу параллельных проекций, то каждой точке пространства $M'(x',\ y',\ z')$ соответствует точка плоскости $M\ (\xi,\ \eta)$. Это значит, что координаты точки M суть функции координат точки M':

$$\xi=F(x',\ y',\ z'), \quad \eta=G(x',\ y',\ z'). \tag{18}$$

Эти функции непрерывны (не только по каждому аргументу, но даже по совокупности аргументов). Доказательство непрерывности нетрудно оформить аккуратно, но мы предпочитаем апеллировать к интуиции: ясно, что весьма близкие точки пространства имеют весьма близкие изображения [1]).

[1]) Обратное неверно!

Запишем лемму 3; ограничимся первой формулой для точек M_1', M_2', M_3':

$$\xi_1 = F(x_1', y_1', z_1'),$$
$$\xi_2 = F(x_2', y_2', z_2'),$$
$$\xi_1 + \xi_2 = F(x_1' + x_2', y_1' + y_2', z_1' + z_2').$$

Отсюда видно, что

$$F(x_1' + x_2', y_1' + y_2', z_1' + z_2') = F(x_1', y_1', z_1') + F(x_2', y_2', z_2'). \quad (19)$$

Из тождества (19) на основании леммы 2 вытекает

$$F(x', y', z') = a_1 x' + b_1 y' + c_1 z'.$$

Аналогичные рассуждения относятся и к функции $G(x', y', z')$:

$$G(x', y', z') = a_2 x' + b_2 y' + c_2 z'.$$

Теперь освободимся от условия, что начало изображается началом. Предположим, что изображением точки $O'(0,0,0)$ служит произвольная точка $O(d_1, d_2)$. Введем в плоскости изображений кроме системы (ξ, η) еще одну систему координат (ξ^*, η^*) по формулам

$$\xi^* = \xi - d_1, \quad \eta^* = \eta - d_2. \quad (20)$$

Изображение точки $O'(0,0,0)$ имеет координаты $\xi = d_1$, $\eta = d_2$, а в новой системе координат $\xi^* = 0$, $\eta^* = 0$. По доказанному новые координаты каждой точки изображения выражаются так:

$$\xi^* = a_1 x' + b_1 y' + c_1 z', \quad \eta^* = a_2 x' + b_2 y' + c_2 z',$$

а старые так:

$$\xi = a_1 x' + b_1 y' + c_1 z' + d_1, \quad \eta = a_2 x' + b_2 y' + c_2 z' + d_2, \quad (21)$$

что и требовалось доказать.

Как видно из хода рассуждений, прямоугольность обеих систем не играет роли.

Имеет место обратная теорема: *если коэффициенты* a_2, b_2, c_2 *не пропорциональны коэффициентам* a_1, b_1, c_1, *то формулы* (21) *определяют отображение пространства на плоскость по методу параллельных проекций.*

Эта книжка—геометрическая, и мы не будем так углубляться в аналитическую сторону.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

ЭЛЛИПС

27. Равномерное сжатие. Самый простой путь построения теории эллипса — использование аффинных преобразований. Аффинные преобразования — важная самостоятельная тема (более важная, чем тема настоящей книжки), и излагать эту тему в приложении, как вспомогательную, нецелесообразно. Поэтому читателя, который хочет серьезно ознакомиться с аффинными преобразованиями и теорией эллипса, мы отсылаем к специальной литературе (например, И. М. Яглом и В. Г. Ашкинузе, Идеи и методы аффинной и проективной геометрии, часть I. Аффинная геометрия, М., 1962, пп. 1—17). Здесь же мы *только для справок* приведем свойства эллипса, необходимые для понимания того, как изображается окружность.

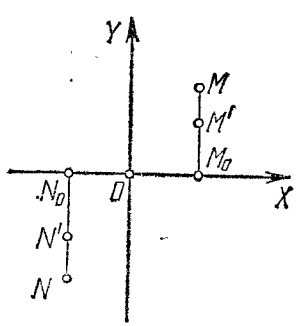

Рис. 58.

Равномерным сжатием называется следующее преобразование плоскости. Выбирается некоторая прямая (она называется осью сжатия), и всякая точка M плоскости перемещается по перпендикуляру к линии сжатия в новое положение M' (рис. 58), причем

$$M_0M' = \lambda \cdot M_0M \qquad (22)$$

(M_0 — проекция точек M и M' на ось сжатия). Здесь λ — постоянная, т. е. она одна и та же для всех точек плоскости.

Если $M \to M'$ (эта запись обозначает: «точка M переходит в точку M» или «точке M соответствует точка M'»), а $N \to N'$, то

$$M_0M' = \lambda \cdot M_0M,$$
$$N_0N' = \lambda \cdot N_0N.$$

λ называется коэффициентом сжатия. Мы будем всегда считать, что $\lambda > 0$. Можно было бы определить сжатие и с отрицательным коэффициентом (при этом соответственные точки лежат по разные стороны от оси сжатия), но мы обойдемся без него.

Отметим некоторые свойства равномерного сжатия:

1. Каждая точка оси сжатия остается на месте (т. е. сама себе соответствует).

2. Если $\lambda < 1$, то все точки (не принадлежащие оси сжатия) приближаются к оси. Если $\lambda > 1$, то все точки отдаляются от оси. В этом случае преобразование (22) естественнее было бы называть не сжатием, а *растяжением*. Но в математике предпочтительна единообразная терминология, хотя бы она шла вразрез с обычным словоупотреблением. Поэтому мы будем всегда употреблять термин «сжатие», даже в случае $\lambda > 1$.

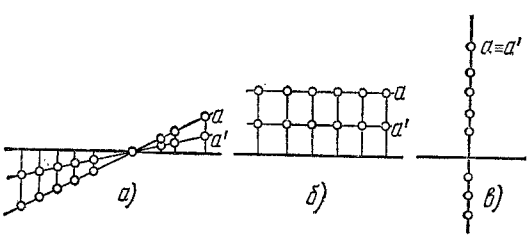

Рис. 59.

Если $\lambda = 1$, то каждая точка остается на своем месте и ось сжатия становится неопределенной. Возможно, что этот случай неинтересен, но всякий частный случай должен быть отмечен. Такое преобразование называется тождественным преобразованием.

3. Прямая переходит в прямую. Поясним, что преобразовать линию (и вообще любую фигуру) — это значит преобразовать каждую ее точку. Если прямая пересекает ось сжатия, то и соответственная прямая пересекает ее (в той же точке) (рис. 59, *а*). Если прямая *а* образует с осью сжатия

угол α, а прямая a' — угол α', то

$$\operatorname{tg}\alpha' = \lambda \operatorname{tg}\alpha.$$

Прямая, параллельная оси сжатия, переходит в другую прямую, тоже параллельную оси сжатия (рис. 59, *б*). Прямая, перпендикулярная оси сжатия, переходит сама в себя (хотя ее точки перемещаются по ней).

4. Параллельные прямые переходят в параллельные. Это сразу вытекает из предыдущего свойства.

5. Если A, B, C — три точки, лежащие на прямой, то их простое отношение инвариантно относительно равномерного сжатия, т. е.

$$\frac{A'C'}{C'B'} = \frac{AC}{CB} \tag{23}$$

(это легко доказывается: стоит только посмотреть на рис. 59). В частности, середина отрезка переходит в середину.

6. Два взаимно перпендикулярных направления, вообще говоря, переходят не во взаимно перпендикулярные. Но бывают случаи, когда $a \perp b$ и также $a' \perp b'$. Перечислим эти случаи.

1) Если $\lambda \neq 1$, то существует *единственная* пара перпендикулярных направлений, которые и после сжатия остаются перпендикулярными: параллельное оси сжатия и перпендикулярное ей. Они называются главными направлениями сжатия.

2) Если $\lambda = 1$, то любая пара перпендикулярных прямых остается после сжатия перпендикулярной, т. е. главные направления становятся неопределенными (все направления — главные).

7. Преобразование, обратное равномерному сжатию, тоже есть равномерное сжатие (к той же оси).

Два преобразования называются взаимно обратными, если первое переводит каждую точку M плоскости в новое положение M', а второе возвращает каждую точку M' обратно в положение M. Другими словами, если плоскость подвергнуть последовательно двум взаимно обратным преобразованиям, то все точки останутся на своих местах. Свойство 7 вытекает из формулы (22). Из нее следует

$$M_0M = \frac{1}{\lambda} M_0M',$$

т. е. формулы, выражающие M_0M и M_0M' друг через друга,

имеют одинаковый вид. Заодно выясняется, что коэффициенты сжатия для двух взаимно обратных сжатий суть λ и $1/\lambda$.

8. Примем ось сжатия за ось X (рис. 58) и дадим аналитическое выражение равномерного сжатия. Если точка $M(x, y)$ переходит в точку $M'(x', y')$, то

$$x' = x, \quad y' = \lambda y. \tag{24}$$

28. Определение эллипса. *Эллипсом называется линия, полученная равномерным сжатием окружности к ее диаметру* (рис. 60).

Примечание 1. Эллипс можно определить поразному. Лучше было бы определить его как линию, полученную из окружности любым аффинным преобразованием, если бы мы знали, что это такое. Равномерное сжатие — частный случай аффинного преобразования.

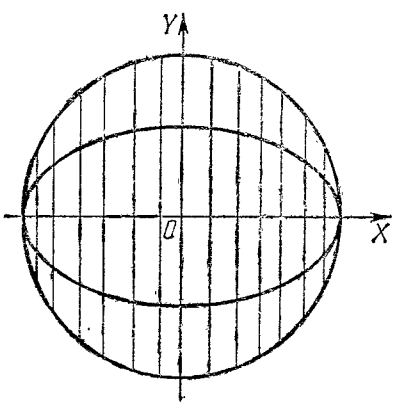

Рис. 60.

Примечание 2. Коэффициент сжатия, упоминаемого в определении, может иметь любое положительное значение. Рис. 60 соответствует случаю $\lambda<1$. При $\lambda=1$ получится окружность. Следовательно, окружность — частный случай эллипса.

Примечание 3. Существуют термины «окружность» и «круг». Окружность есть контур круга. Для эллипса такой роскоши нет. Один и тот же термин обозначает и часть плоскости и ограничивающий ее контур.

29. Некоторые свойства эллипса. На рис. 61 AB и CD — взаимно перпендикулярные диаметры окружности. Каждый из них делит пополам хорды, параллельные другому. На чертеже проведены хорды, параллельные AB, и отмечены их середины: они лежат на CD.

На том же чертеже произведено сжатие к некоторому диаметру. Окружность перешла в эллипс, диаметры AB и CD — соответственно в $A'B'$ и $C'D'$. *Перпендикулярность*

диаметров исчезла, но хорды, параллельные диаметру AB, перешли в параллельные хорды эллипса, их середины — в середины. Сравнивая эллипс с окружностью, приходим к следующим выводам.

1) *Середины параллельных хорд эллипса лежат на прямой.*

Геометрическое место середин параллельных хорд называется диаметром эллипса, сопряженным этим хордам.

2) Можно рассмотреть хорды, параллельные этому диаметру. Сопряженный им диаметр входит в первое семейство хорд. Таким образом, сопряженность есть свойство взаимное.

Два диаметра эллипса называются сопряженными, если каждый из них делит пополам хорды, параллельные другому.

3) *Все диаметры эллипса проходят через одну точку, называемую центром эллипса. Центр эллипса служит его центром симметрии.*

4) *Касательные к эллипсу в концах одного диаметра параллельны сопряженному диаметру.*

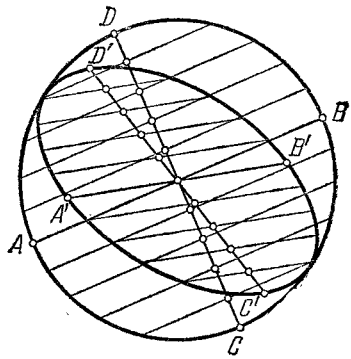

Рис. 61.

Взаимно перпендикулярные диаметры окружности при сжатии переходят в сопряженные диаметры эллипса, которые, вообще говоря, не перпендикулярны. Единственное исключение — когда перпендикулярные диаметры окружности имели главные направления. Это значит, что один диаметр лежит на оси сжатия, а другой перпендикулярен ему. Таким образом,

5) *Эллипс, отличный от окружности, имеет единственную пару взаимно перпендикулярных сопряженных диаметров.*

Эти диаметры называются осями эллипса и служат его осями симметрии. На рис. 62 взято $\lambda<1$. AB называется большой осью, $C'D'$ — малой осью. Принято обозначать большую ось $2a$, а малую $2b$. $OB=a$ называется большой полуосью, $OD'=b$ малой полуосью. Концы осей называются вершинами эллипса.

Теперь ясно, что в случае $\lambda>1$ мы не получим ничего нового, только AB будет малой осью, а $C'D'$ — большой. Поэтому можно ограничиться случаем $\lambda<1$.

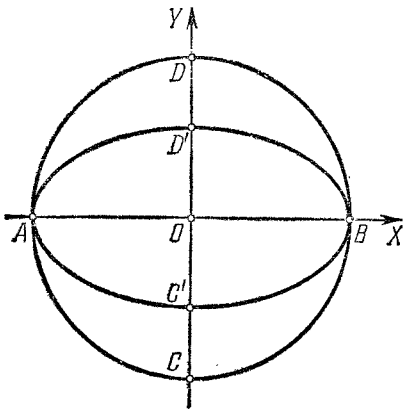

Рис. 62.

Из изложенного ясно, что $b=\lambda a$, т. е.

$$\lambda=\frac{b}{a}. \qquad (25)$$

6) Выведем уравнение эллипса, располагая оси координат так, как показано на рис. 60. Уравнение окружности

$$x^2+y^2=a^2. \qquad (26)$$

Выразим текущие координаты точек окружности (x, y) через текущие координаты соответственных точек эллипса (x', y') по формулам (24). Тогда уравнение (26) примет вид

$$x'^2+\frac{y'^2}{\lambda^2}=a^2.$$

Заменим λ по формуле (25)

$$x'^2+\frac{y'^2}{\left(\frac{b}{a}\right)^2}=a^2 \text{ или проще } \quad \frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1.$$

Штрихи были введены для того, чтобы отличать координаты точек эллипса от координат точек окружности. Если забыть об окружности и рассматривать эллипс автономно, то штрихи не нужны:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (27)$$

7) Отношение полуосей b/a заключено в границах

$$0<\frac{b}{a}\leqslant 1. \qquad (28)$$

Это отношение определяет форму эллипса. Если b/a мало, то эллипс сильно вытянут, при увеличении b/a эллипс становится «круглее», при $b/a=1$ эллипс есть окружность.

Почему мы исключаем случай $b/a=0$, т. е. $b=0$? При $b=0$ эллипс выродится в двойной отрезок. Считать ли его эллипсом? Это дело условия. Можно считать его эллипсом, но тогда надо рассматривать равномерное сжатие с коэффициентом $\lambda=0$. При этом пришлось бы пересмотреть некоторые свойства равномерного сжатия, изложенные выше.

30. Эллипс как проекция окружности. Имеет место Теорема. *Если α и β две не перпендикулярные плоскости и в плоскости α дана окружность, то ее ортогональная проекция на плоскость β есть эллипс.*

Доказательство. Сначала предположим, что плоскости α и β пересекаются (рис. 63). Проведем в окружности диаметр $A'B'$, параллельный плоскости β (т. е. параллельный линии пересечения плоскостей α и β). Этот

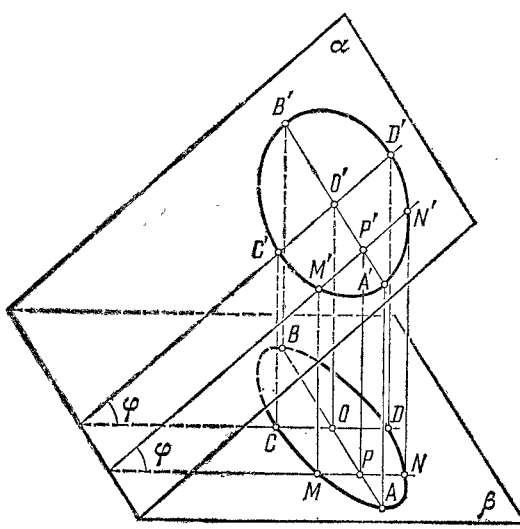

Рис. 63.

диаметр спроектируется в отрезок AB, равный $A'B'$ и тоже параллельный линии пересечения плоскостей. Обозначим общую величину этих отрезков через $2a$: $A'B'=AB=2a$. Рассмотрим теперь любую хорду окружности $M'N'$, перпендикулярную $A'B'$. Точка P' — середина хорды $M'N'$. Полухорда $P'N'$ спроектируется в отрезок PN, перпендикулярный AB (теорема о трех перпендикулярах). Точка P

занимает на AB такое же положение, как точка P' на $A'B'$, т. е. $OP=O'P'$. Длина проекции отрезка $P'N'$ определяется по известной формуле $PN=P'N'\cdot\cos\varphi$, где φ — линейный угол двугранного угла между плоскостями α и β.

Получается, что диаметр $A'B'$ спроектировался на β в натуральную величину, все полухорды $P'N'$ перенесены «на свои места». Если бы они сохранили натуральную величину, то в плоскости β получилась бы такая же окружность, что и в плоскости α. Но в действительности эти полухорды при перенесении на плоскость β уменьшаются: *они все умножаются на один и тот же коэффициент* (Внимание! Это — главный пункт доказательства), равный косинусу угла между плоскостями. Следовательно, интересующая нас проекция представляет равномерное сжатие окружности к диаметру, т. е. эллипс.

Мы предположили, что плоскости α и β пересекаются. Если они параллельны, то дело обстоит еще проще: проекция окружности есть такая же окружность, как и проектируемая. Итак, теорема доказана.

Сделаем одно дополнительное замечание. Среди полухорд окружности, перпендикулярных $A'B'$, имеется радиус $O'D'=a$. Ясно, что его проекция есть малая полуось эллипса b. Значит, $b=a\cdot\cos\varphi$.

Таким образом, доказанную теорему можно дополнить так: «*...есть эллипс, у которого отношение полуосей равно косинусу угла между плоскостями* α *и* β», т. е.

$$\frac{b}{a}=\cos\varphi. \tag{29}$$

Если плоскости α и β перпендикулярны, то проекция окружности есть двойной отрезок.

31. Сечение кругового цилиндра. Справедлива

Т е о р е м а. *Сечение кругового цилиндра плоскостью, не параллельной образующим, есть эллипс.*

П р и м е ч а н и е. Имеется в виду *бесконечный* цилиндр, т. е. бесконечная труба без оснований.

Не будем подробно излагать доказательство, потому что оно почти полностью совпадает с предыдущим, расходясь в одном пункте. На рис. 64 показано сечение кругового цилиндра плоскостью β. Эллипс ли это — пока не известно. Там же показано нормальное сечение цилиндра (плоскостью α). Это — окружность. Проведем в окружности

диаметр $A'B'$, параллельный плоскости β (такой диаметр — единственный) и «поднимем» его концы по образующим цилиндра до плоскости β. Получим хорду AB, причем $AB=A'B'$. Пусть $P'N'$ — полухорда окружности, перпендикулярная $A'B'$. Поднимая эту хорду до плоскости β, получим отрезок PN. Вот в чем расхождение с предыдущим доказательством: отрезок PN получается из $P'N'$ *не умножением, а делением* на $\cos\varphi$:

$$PN=\frac{P'N'}{\cos\varphi}.$$

Из постоянства множителя $\frac{1}{\cos\varphi}$ следует, что сечение плоскостью β — эллипс.

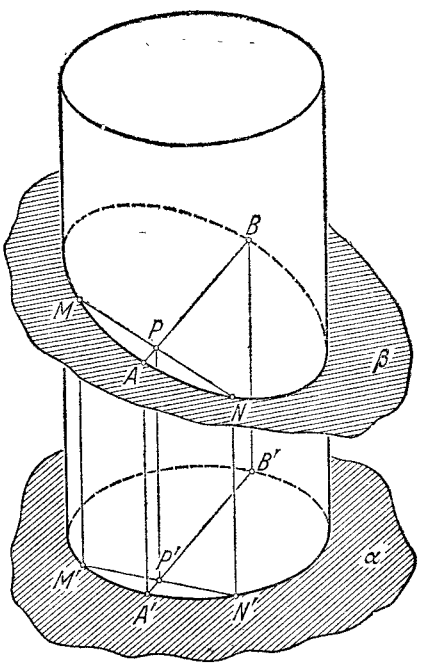

Рис. 64.

В отличие от предыдущей ситуации, тот диаметр окружности, который сохраняет свою величину:

$$AB=A'B',$$

служит *не большой, а малой полуосью* эллипса. Но формула (29) справедлива и в этом случае.

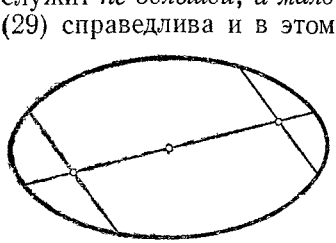
Рис. 65.

32. Некоторые построения, связанные с эллипсом. 1. Дан (т. е. вычерчен) эллипс. Найти его центр. Проводим две параллельные хорды (рис. 65). Делим каждую пополам. Соединяем середины, это диаметр. Делим диаметр пополам, середина диаметра — это центр.

2. Построить диаметр, сопряженный данному. Проводим хорду, параллельную данному диаметру. Делим диаметр

и эту хорду пополам. Соединяя середину диаметра (центр эллипса) с серединой хорды, получаем диаметр, сопряженный данному.

3. На эллипсе дана точка M. Построить касательную в этой точке к эллипсу. Соединяем точку M с центром эллипса O. Строим диаметр, сопряженный диаметру OM. Через точку M проводим прямую, параллельную этому сопряженному диаметру — это и есть искомая касательная.

4. Построить оси эллипса. Если точка M описывает четверть эллипса от конца большой оси до конца малой оси, то ее радиус-вектор OM непрерывно изменяется, принимая *один раз* каждое значение между a и b. При прохождении каждой из следующих четвертей радиус-вектор снова принимает по одному разу те же значения.

Две точки эллипса, симметричные относительно какой-нибудь его оси, имеют одинаковые радиус-векторы. Обратно, если две точки эллипса, расположенные по одну сторону большой (малой) оси, имеют одинаковые радиус-векторы, то они симметричны относительно малой (большой) оси (это следует из того, что в каждой четверти радиус-вектор *только один раз* принимает каждое возможное значение).

Отсюда вытекает следующее построение осей (рис. 66).

Строим окружность, центр которой совпадает с центром эллипса O и радиус r которой больше b, но меньше a:

$$b<r<a.$$

Эта окружность пересекает эллипс в четырех точках M, P, N, Q. Эти точки имеют одинаковые радиус-векторы и, следовательно, симметричны относительно осей эллипса. Значит, остается восстановить оси симметрии четверки точек M, P, N, Q. Для этого надо:

либо провести биссектрисы углов, образованных прямыми MN и PQ,

либо провести средние линии прямоугольника $MPNQ$.

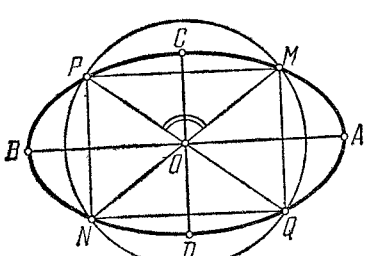

Рис. 66.

Полученные оси симметрии AB и CD и служат осями эллипса.

5. Построить эллипс по паре сопряженных диаметров. Мы уже говорили (п. 10), что «построить эллипс», значит построить сколько угодно точек эллипса.

Даны два сопряженных диаметра эллипса AC и BD (рис. 67, *б*). Возьмем окружность и опишем около нее квадрат. Обозначим точки касания A_0, B_0, C_0, D_0. Будем считать, что A_0C_0 и B_0D_0 — те диаметры, которые после сжатия окружности переходят в сопряженные диаметры эллипса AC и BD (Осторожно! Не подумайте, что A_0C_0 или B_0D_0 — ось сжатия). Разделим O_0B_0 на несколько равных частей (на рис. 67 — на четыре части) и B_0E_0 — на столько же равных частей. Отсчитаем одинаковое число частей от O_0 кверху и от E_0 влево, получим соответственно точки M_0 и N_0. Проведем прямые C_0M_0 и A_0N_0; *точка их пересечения принадлежит окружности.* В самом деле, из равенства треугольников $O_0M_0C_0$ и $E_0N_0A_0$ вытекает, что $A_0N_0 \perp C_0M_0$.

После сжатия квадрат превратится в параллелограмм, отрезки OB и BE по-прежнему будут разделены каждый на равные части, но OB и BE уже не будут равны между

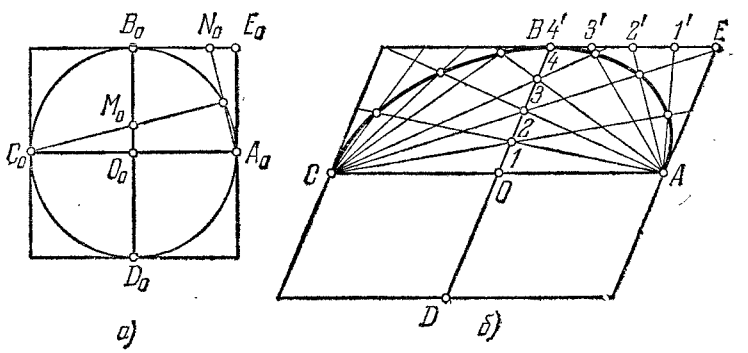

Рис. 67.

собой. Построение осуществляется так (рис. 67, *б*). На AC и BD как на средних линиях строим параллелограмм. OB разделено на равные части, точки деления обозначены 1, 2, 3,..., EB тоже разделено на равные части, точки деления обозначены 1′, 2′, 3′, ... Точки пересечения $C1 \times A1'$, $C2 \times A2'$, $C3 \times A3'$, ... принадлежат эллипсу.

Предлагаем читателю самому разобраться по чертежу, как получаются точки эллипса в остальных четвертях.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

33. **Литературные указания.** Мы подошли к самому трудному пункту: какую литературу порекомендовать читателю, который заинтересовался темой и хочет продолжить ее изучение. Трудно делать рекомендации читателю, с которым лично не знаком. Сформулируем сначала некоторые предположения: 1. Читателю этой книжки 15—17 лет. 2. Он учится в 8-м, 9-м или 10-м классе. 3. Он в душе математик.

Если это так, то советуем ему не читать никаких толстых трактатов и монографий: это задержит его движение вперед. Надо двигаться как можно быстрее и знакомиться с новыми математическими идеями. Если читатель не собирается специализироваться на начертательной геометрии, то изложенного в этой книжке для него достаточно. Это обеспечивает элементарную грамотность в выполнении чертежей.

Если читатель хочет немного расширить свои познания, например, узнать о свойствах центральных проекций, то:

[1] Н. М. Б е с к и н, Методы изображений («Энциклопедия элементарной математики», книга 4-я — Геометрия, М., 1963, Физматгиз, стр. 228—290). Эта статья во многом перекрывается с настоящей книжкой.

Для читателя, желающего поупражняться в применении полученных знаний, подойдут книги:

[2] Н. Ф. Ч е т в е р у х и н, Стереометрические задачи на проекционном чертеже, М., 1955.

[3] Л. М. Л о п о в о к, Сборник стереометрических задач на построение, М., 1953.

Для читателя-художника, интересующегося рисованием:

[4] Г. А. В л а д и м и р с к и й, Перспектива, М., 1952.

[5] В. В. Щ е р б и н а, Техническое рисование, М., 1952. В этой книге речь идет о рисовании геометрических тел.

Наконец, всем читателям можно порекомендовать увлекательную книгу:

[6] А. И. О с т р о в с к и й, Начертательная геометрия в популярном изложении, изд. 2-е, М., 1963.